PRÁCTICA 1: *Cardinalidad*

Pablo Verdes Dante Zanarini Pamela Viale Alejandro Hernández

1. Mediante el uso de biyecciones apropiadas, demuestre cada uno de los siguientes ítems:
   a) $P = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ mód } 2 = 0\}$ es equipotente a $\mathbb{N}$.
   b) $A = \{1, 2, 3\}$ no es equipotente a $B = \{7\}$.
   c) Todos los intervalos reales cerrados y acotados son equipotentes entre sí.
   d) $(-\infty, \infty)$ es equipotente a $(0, 1)$ y a $(0, \infty)$.

2. Sean A, B, C conjuntos cualesquiera. Mostrar que:
   a) $\text{card}\,(A) = \text{card}\,(A \times \{b\})$ cualquiera sea b
   b) $\text{card}\,(A \times B \times C) = \text{card}\,(A \times (B \times C))$
   c) $\text{card}\,(A \times B) = \text{card}\,(B \times A)$
   d) si $\text{card}\,(B) \preceq \text{card}\,(C)$ entonces $\text{card}\,(A \times B) \preceq \text{card}\,(A \times C)$
   e) si $\text{card}\,(A) = n$ entonces $\text{card}\,(\mathcal{P}(A)) = 2^n$

3. Mostrar que si $A \sim B$ y $C \sim D$ entonces $A \times C \sim B \times D$. ¿Vale la afirmación recíproca?

4. Demuestre que si $A \preceq B$ y $C \preceq D$, y además $B \cap D = \emptyset$, entonces $A \cup C \preceq B \cup D$.

5. Mostrar que los siguientes conjuntos son infinito numerables:
   a) $\{ \sqrt[n]{m}/n^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$
   b) $\{$sucesiones de la forma $\langle s_0, s_0 + r, s_0 + 2r, \ldots, s_0 + nr, \ldots\rangle \mid s_0, r \in \mathbb{Z}\}$
   c) $\{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{Z} \wedge b > a\}$
   d) $\{p(x) \mid p(x)$ es un polinomio a coeficientes enteros$\}$

6. Un número $r \in \mathbb{R}$ se dice *algebraico* sii es la solución de una ecuación polinómica a coeficientes enteros, es decir, sii

   $$a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \cdots + a_n r^n = 0 \quad \text{para algún } n \in \mathbb{N} \text{ y } a_i \in \mathbb{Z} \text{ para } i = 0, 1, \ldots n$$

   Probar que:
   a) Todo número racional es algebraico.
   b) ¿Qué se puede concluir a partir del ítem anterior con respecto a la cardinalidad del conjunto de los números algebraicos?
   c) $\sqrt{2}$ es algebraico.
   d) El conjunto de los números algebraicos es numerable.

7. Los números reales que no son algebraicos se denominan *trascendentes.*[1]

   a) Teniendo como hipótesis que $\mathbb{R}$ no es numerable, probar que existen números trascendentes.

   b) Probar que los números trascendentes no son numerables.

   Sugerencia: en ambos casos razonar por el absurdo y considerar a los reales como la unión de los reales algebraicos y de los reales trascendentes.

8. Se sabe que $\aleph_0 \prec \mathsf{c}$, donde $\aleph_0 = \text{card}\,(\mathbb{N})$ y $\mathsf{c} = \text{card}\,(\mathbb{R})$. Pero ¿existe un cardinal α tal que $\aleph_0 \prec \alpha \prec \mathsf{c}$? Cantor, al no poder dar una respuesta a esta pregunta, conjetura la validez de la llamada *hipótesis del continuo*. Ésta expresa que:

   No existe un cardinal α tal que $\aleph_0 \prec \alpha \prec \mathsf{c}$

   A partir de esto, al cardinal c se lo suele llamar también $\aleph_1$. Utilizando esta hipótesis, se pide demostrar el siguiente teorema:

$$\text{card}\,(A) = \aleph_0 \;\text{ y }\; \text{card}\,(B \cup A) = \aleph_1 \;\Rightarrow\; \text{card}\,(B) = \aleph_1$$

9. Sea Σ un conjunto finito de símbolos. $\Sigma^\star$ denota el conjunto de todas las cadenas (secuencias finitas y ordenadas de símbolos) sobre el alfabeto Σ.

   a) ¿Cuántas cadenas se pueden contruir sobre el alfabeto Σ?

   b) ¿Cuántos lenguajes[2] existen sobre el alfabeto Σ?

10. *a*) Muestre que la cardinalidad de $\mathcal{P}(X)$ es igual a la cardinalidad del conjunto de todas las funciones de X a $\{0, 1\}$.

    b) Pruebe que

$$\text{card}\,(\{f \mid f : \mathbb{N} \to \{0,1\}\}) \;\preceq\; \text{card}\,(\{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\})$$

    c) Concluya que

$$\aleph_0 \;\prec\; \mathcal{P}(\mathbb{N}) \;\preceq\; \text{card}\,(\{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\})$$

    d) Todo programa de computadora puede considerarse como una cadena sobre el alfabeto presente en el sistema. Por lo tanto, ¿cuántos programas distintos se pueden programar en una máquina?

    e) ¿Qué conclusiones pueden sacarse a partir de los últimos dos ítems?

[1] Por ejemplo, se sabe que son trascendentes: π, e^x con $x \neq 0$, y $\ln x$ con $x \neq 1$ para todo x algebraico.
[2] Un lenguaje sobre el alfabeto Σ es un subconjunto de $\Sigma^\star$.