# PRÁCTICA 2: *Conjuntos Inductivos*

Pablo Verdes Dante Zanarini Pamela Viale Alejandro Hernández

1. Defina inductivamente los siguientes conjuntos:
   (a) El conjunto de los números naturales múltiplos de 3.
   (b) El conjunto de los números enteros múltiplos de 3.

2. Sea $\Sigma = \{a, b, c\}$. Defina inductivamente los siguientes conjuntos y enuncie el principio de inducción primitiva para cada uno de ellos.
   (a) $\Sigma^*$
   (b) $\{a^n\, b\, c^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

3. Defina inductivamente los siguientes conjuntos:
   (a) $\{a\}^*$
   (b) $\{\alpha \in \{a, b, c\}^* \mid \alpha \text{ es un palíndromo}\}$
   (c) $\{a, b, ab, ba\}$

4. Considere el conjunto de matrices

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{N},\ \text{donde } a, b, c \text{ tienen la misma paridad} \right\}$$

   (a) Defina inductivamente el conjunto $M$.
   (b) Enuncie el principio de inducción primitiva para $M$.

5. Enuncie el principio de inducción primitiva para el conjunto $\mathbb{P}$, definido inductivamente como el menor conjunto tal que:
   i. $0 \in \mathbb{P}$
   ii. Si $n \in \mathbb{P}$ entonces $(n + 2) \in \mathbb{P}$

   Utilice este principio para probar que para todo $n \in \mathbb{P}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + m$.

6. Sea $\Sigma = \{a, b, c\}$. Definimos $\Delta$ inductivamente como el menor conjunto tal que:
   i. $a \in \Delta$
   ii. Si $\alpha \in \Delta$ entonces $b\alpha b \in \Delta$

   (a) Enuncie el principio de inducción primitiva para $\Delta$.
   (b) Demuestre que cualquier cadena de $\Delta$ tiene un número par de símbolos $b$.

7. Sea $\Sigma = \{a, b, c\}$. Definimos $\Gamma$ inductivamente como el menor conjunto tal que:

   i. $\epsilon \in \Gamma$
   ii. Si $\alpha \in \Gamma$ entonces $b\alpha \in \Gamma$
   iii. Si $\alpha \in \Gamma$ entonces $a\alpha \in \Gamma$

   (a) Enuncie el principio de inducción primitiva para $\Gamma$.

   (b) Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:
   - $b \in \Gamma$
   - $a \in \Gamma$
   - $babacbaca \in \Gamma$
   - $aba \in \Gamma$

   (c) Considere ahora el conjunto $\Delta$ definido inductivamente como el menor conjunto tal que:

   i. $\epsilon \in \Delta$
   ii. Si $\alpha \in \Delta$ entonces $\alpha b \in \Delta$
   iii. Si $\alpha \in \Delta$ entonces $\alpha a \in \Delta$

   Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:
   - $\Gamma \subseteq \Delta$
   - $\Delta \subseteq \Gamma$
   - $\Delta = \Gamma$

8. Definimos inductivamente la relación $S \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ como el menor conjunto tal que:

   i. Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $(n, n) \in S$
   ii. Si $(n, m) \in S$ entonces $(n, m + 1) \in S$

   (a) Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:
   - $(0, 0) \in S$
   - $0 \in S$
   - $(2, 3) \in S$
   - $(3, 4) \in S$

   (b) Enuncie el principio de inducción primitiva para $S$. Demuestre, utilizando este principio, que para todo par $(n, m) \in S$, $n \leq m$.

   (c) Definimos inductivamente $Q \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ como el menor conjunto tal que:

   i. Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $(0, n) \in Q$
   ii. Si $(n, m) \in Q$ entonces $(n + 1, m + 1) \in Q$

   Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:
   - $S \subseteq Q$
   - $Q \subseteq S$
   - $Q = S$