PRÁCTICA 3: *Funciones recursivas primitivas*

Pablo Verdes Dante Zanarini Pamela Viale Alejandro Hernández

Funciones recursivas primitivas

1. Mostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $g_n(x) = n$ para todo $x \in \mathbb{N}$ es recursiva primitiva.

2. Mostrar que las siguientes son FRP:

   a) $\Sigma(y, x) = y + x$

   b) $\Pi(y, x) = y \times x$

   c) $Fac(x) = x!$

   d) $Exp(y, x) = x^y$

   e) La función *predecesor*, definida por

   $$Pd(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

   f) La función *diferencia*, definida por

   $$\hat{d}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < y \\ x - y & \text{si } x \geq y \end{cases}$$

   Notamos generalmente $\hat{d}(x, y)$ como $x \dot{-} y$.

   g) La función *distinguidora del cero*, definida por

   $$D_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   h) $k(x, y) = |x - y|$

   i) La función $E^{(2)}$ definida por

   $$E(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

3. Sumatorias y productorias:

a) Sea $f^{(2)}$ una FRP de dos variables. Definimos dos nuevas funciones $F^{(2)}$ y $G^{(2)}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} F(y,x) &= \sum_{z=0}^{y} f(z,x) \\ G(y,x) &= \prod_{z=0}^{y} f(z,x) \end{aligned}$$

Mostrar que F y G son FRP.

b) Más generalmente, sea $f^{(k+1)}$ una FRP de $k+1$ variables. Definimos dos nuevas funciones $F^{(k+1)}$ y $G^{(k+1)}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} F(y,X) &= \sum_{z=0}^{y} f(z,X) \\ G(y,X) &= \prod_{z=0}^{y} f(z,X) \end{aligned}$$

donde X representa una k-upla. Mostrar que F y G son FRP.

4. Sea $f^{(1)} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Definimos una nueva función $F^{(2)}$ llamada *función potencia* de f como

$$F(y,x) = \begin{cases} x & \text{si } \ y = 0 \\ f(F(y-1,x)) & \text{si } \ y > 0 \end{cases}$$

Notamos generalmente $F(y,x)$ como $f^y(x)$.

a) Mostrar que $\Sigma(y,x) = s^y(x)$.

b) Mostrar que si f es una FRP, entonces F resulta una FRP.

c) Escribir la función *diferencia* $\hat{d}$ utilizando potencias.

Conjuntos recursivos primitivos

5. Mostrar que todo subconjunto unitario de $\mathbb{N}$ es un CRP.

6. Probar que si $A, B \subseteq \mathbb{N}$ son CRP, entonces $\neg A$, $A \cup B$ y $A \cap B$ son CRP.

7. Mostrar que todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ son CRP.

8. Repetir los tres ejercicios anteriores considerando ahora subconjuntos de $\mathbb{N}^k$ con $k \in \mathbb{N}$.

9. Mostrar que el conjunto de los números pares es un CRP.

10. Mostrar que el conjunto de los múltiplos de 3 es un CRP.

    Sugerencia: Probar que la función $r_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que toma un natural y devuelve el resto de la división entera por 3 es una FRP, y usarla para escribir la función característica de los múltiplos de 3.

Relaciones recursivas primitivas

Una relación $\mathsf{R} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se dice *recursiva primitiva* (RRP) si es un CRP.

11. Mostrar que $=$, $\neq$, $\leq$ y $>$ son RRP.

12. Probar que si $\mathsf{R}, \mathsf{S} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ son RRP, entonces también lo son las relaciones T, U y $\neg\mathsf{R}$, donde

$$\begin{aligned} x \,\mathsf{T}\, y &= x \,\mathsf{R}\, y \,\wedge\, x \,\mathsf{S}\, y \\ x \,\mathsf{U}\, y &= x \,\mathsf{R}\, y \,\vee\, x \,\mathsf{S}\, y \\ x \,(\neg\mathsf{R})\, y &= \neg(x \,\mathsf{R}\, y) \end{aligned}$$

13. Teniendo en cuenta los resultados del último ítem, ¿cómo podríamos haber probado que $\neq$ y $>$ son RRP?

14. Sea $\mathsf{R} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Definimos $\bigwedge \mathsf{R}$ y $\bigvee \mathsf{R}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x \,(\textstyle\bigwedge \mathsf{R})\, y \quad &\text{sii} \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \text{ tal que } 0 \leq k \leq y \text{ se tiene } x \,\mathsf{R}\, y \\ x \,(\textstyle\bigvee \mathsf{R})\, y \quad &\text{sii} \quad \exists\, k \in \mathbb{N} \text{ tal que } 0 \leq k \leq y \,\wedge\, x \,\mathsf{R}\, k \end{aligned}$$

Probar que si R es una RRP, entonces $\bigwedge \mathsf{R}$ y $\bigvee \mathsf{R}$ también son RRP.

Varios

15. Probar que la siguiente función es una FRP:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } \; x \text{ es múltiplo de 3} \\ x + 3 & \text{si } \; x \text{ tiene resto 1 en la división por 3} \\ x! & \text{si } \; x \text{ tiene resto 2 en la división por 3} \end{cases}$$

16. Probar que la relación de divisibilidad entre naturales es una RRP.

Sugerencia: Defina la familia de funciones $r_a^{(1)}$, $a = 1, 2, \ldots$; donde $r_a^{(1)}(n)$ devuelve el resto de dividir n por a, y escriba la función característica de la relación en términos de estas funciones.