Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Ciencias de la Computación
Lógica

Práctica 1: Semántica de la Lógica Proposicional

1. Dé secuencias de formación para las siguientes fórmulas:

I. $p_1 \vee (\neg p_2 \to p_3)$

II. $((p_1 \to p_2) \to p_3) \to p_4$

III. $(\neg p_1 \to (p_3 \vee (p_5 \wedge p_4))) \vee \neg p_2$

IV. $(p_1 \wedge ((p_3 \to p_5) \to p_4)) \to (\neg p_2 \wedge p_6)$

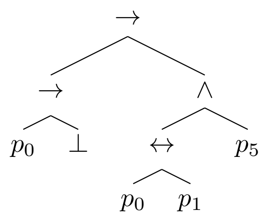
V. $(p_1 \vee (\neg p_2 \to p_3)) \wedge ((p_3 \to p_5) \to p_4)$

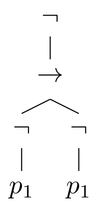
2. En clase de práctica veremos la definición de árbol sintáctico para una fórmula.

I. Determine los árboles sintácticos correspondientes a las fórmulas del ejercicio **1.**

II. Determine las proposiciones correspondientes a los siguientes árboles.

a.


b.


c.


3. Definir por recursión primitiva la función $\mathsf{subs} : \textsc{Prop} \to \mathcal{P}(\textsc{Prop})$ tal que $\mathsf{subs}(\phi)$ es el conjunto de todas las subfórmulas de ϕ.

4. Sea n el número de conectivos que aparecen en una fórmula ϕ. Demuestre que ϕ tiene a lo sumo $2n+1$ subfórmulas.

5. Sea F el conjunto de todas las fórmulas proposicionales para las cuales existe una secuencia de formación. Demuestre que $F = \textsc{Prop}$.

6. Sea ϕ una fórmula y v, v' dos valuaciones. Demuestre que si para todo p_i que ocurre en ϕ se cumple $v(p_i) = v'(p_i)$, entonces $[\![\phi]\!]_v = [\![\phi]\!]_{v'}$.

7. Demuestre el Teorema de Sustitución enunciado en clase.

8. Determinar $\phi[\neg p_0 \to p_3/p_0]$ para:

I. $\phi = p_1 \wedge p_0 \to (p_0 \to p_3)$

II. $\phi = (p_3 \leftrightarrow p_0) \vee (p_2 \to \neg p_0)$

9. Muestre que:

I. $\phi \models \phi \vee \psi$

II. si $\phi \models \psi$ y $\psi \models \chi$, entonces $\phi \models \chi$

III. si $\models \phi \to \psi$, entonces $\phi \models \psi$

IV. $\neg(\phi \wedge \chi) \models \neg\phi \vee \neg\chi$

V. $\neg\phi \vee \neg\chi \models \neg(\phi \wedge \chi)$

10. Sean $\phi, \psi \in \textsc{Prop}$ tales que $\models \phi \to \psi$. Demuestre:

I. $\models (\phi \wedge \psi) \leftrightarrow \phi$

II. $\models (\phi \vee \psi) \leftrightarrow \psi$

11. Sean $\phi, \psi \in \textsc{Prop}$, y v una valuación. Demuestre que $[\![\phi \leftrightarrow \psi]\!]_v = T$ sii $[\![\phi]\!]_v = [\![\psi]\!]_v$.

12. Sea ϕ una fórmula proposicional. Decimos que ϕ es

- **válida** (o una **tautología**) sii para toda valuación v, $[\![\phi]\!]_v = T$
- **contradictoria** sii para toda valuación v, $[\![\phi]\!]_v = F$
- **satisfactible** sii existe una valuación v tal que $[\![\phi]\!]_v = T$

Demuestre que ϕ es satisfactible sii $\neg\phi$ no es válida.

13. Sea $\Gamma \subseteq \textsc{Prop}$. Mostrar que $\Gamma \models \phi$ sii $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es insatisfactible.

14.

I. Demuestre que $\{\vee, \neg\}$ es un conjunto completo de conectivos.

II. Defina un operador binario $\oplus$ de modo que $\{\oplus\}$ sea un conjunto completo de conectivos, y demuéstrelo.

15. Demuestre que si $C \subseteq \{\neg, \wedge, \vee, \to, \bot\}$ es un conjunto completo de conectivos, entonces $\neg \in C$ o $\bot \in C$.