Práctica 6: Lógica de predicados - Deducción natural

1. Probar la validez de los siguientes secuentes usando, entre otras, las reglas de introducción y eliminación de la igualdad. El símbolo $+$ es un símbolo de función de aridad 2, mientras que $<$ es un símbolo de predicado también de aridad 2.

(a) $(y = 0) \wedge (y = x) \vdash 0 = x$

(b) $t_1 = t_2 \vdash (t + t_2) = (t + t_1)$

(c) $(x = 0) \vee ((x + x) > 0) \vdash (y = (x + x)) \rightarrow ((y > 0) \vee (y = (0 + x)))$

2. Las pruebas de los secuentes que hay a continuación combinan las reglas para la igualdad y los cuantificadores. Escribimos $\phi \leftrightarrow \psi$ como abreviación de $(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$. Encontrar pruebas para:

(a) $P(b) \vdash \forall x(x = b \rightarrow P(x))$

(b) $P(b), \forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \rightarrow x = y) \vdash \forall x(P(x) \leftrightarrow x = b)$

(c) $\exists x \exists y(H(x, y) \vee H(y, x)), \neg \exists x H(x, x) \vdash \exists x \exists y \neg(x = y)$

(d) $\forall x(P(x) \leftrightarrow x = b) \vdash P(b) \wedge \forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \rightarrow x = y)$

3. Probar los siguientes secuentes:

(a) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash (\forall x \neg Q(x)) \rightarrow (\forall x \neg P(x))$

(b) $\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x)) \vdash \neg(\exists x(P(x) \wedge Q(x)))$

(c) $\neg \exists x \phi \vdash \forall x \neg \phi$

(d) $(\forall x \phi) \wedge (\forall x \psi) \dashv\vdash \forall x(\phi \wedge \psi)$

4. Demostrar la validez de los siguientes secuentes, donde $ar(f) = 2$, $ar(F) = ar(G) = ar(P) = ar(Q) = 1$ y $ar(S) = 0$.

(a) $\exists x(S \rightarrow Q(x)) \vdash S \rightarrow \exists x Q(x)$

(b) $\forall x P(x) \rightarrow S \vdash \exists x(P(x) \rightarrow S)$

(c) $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \vdash \forall x P(x) \vee \exists x Q(x)$

(d) $\forall x(\neg P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

(e) $\exists x(\neg P(x) \vee Q(x)) \vdash \exists x(\neg(P(x) \wedge \neg Q(x)))$

(f) $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$

(g) $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

(h) $\forall x \forall y (G(y) \to F(x)) \vdash \exists y G(y) \to \forall x F(x)$

(i) $\forall x \neg P(x) \vdash \neg \exists x P(x)$

(j) $\forall x (f(x, c) = x), \forall x (f(c, x) = x) \vdash \forall y (\forall x (f(x, y) = x)) \to y = c)$

5. Sean ϕ y ψ fórmulas de la lógica de predicados. Demostrar las siguientes equivalencias deductivas, asumiendo que $x \notin FV(\psi)$:

(a) $\forall x \phi \vee \psi \dashv\vdash \forall x (\phi \vee \psi)$

(b) $\exists x (\phi \to \psi) \dashv\vdash \forall x \phi \to \psi$

(c) $\forall x (\phi \to \psi) \dashv\vdash \exists x \phi \to \psi$

6. Probar la validez de los siguientes secuentes:

(a) $\forall x \forall y P(x, y) \vdash \forall u \forall v P(u, v)$

(b) $\exists x \exists y F(x, y) \vdash \exists u \exists v F(u, v)$

7. En la práctica 5 se le pedía dar un conjunto de fórmulas Γ que caracterice la estructura de grupo.

(a) Demostrar que $\Gamma \vdash e = e^{-1}$

(b) Expresar, mediante una fórmula ϕ, la siguiente propiedad: *"Existe un único elemento neutro para la operación binaria"*.

(c) Demostrar que $\Gamma \vdash \phi$

8. En el ejercicio 6 de la práctica 5 se pedía caracterizar a los grafos simples bipartitos mediante un conjunto Γ de fórmulas de la lógica de predicados. Utilizando esa formalización, demostrar:

(a) $\Gamma \vdash \forall x \forall y \forall z \, (U(x) \wedge R(x, y) \wedge R(y, z) \to U(z))$

(b) $\Gamma \vdash \forall x \forall y \forall z \, (R(x, y) \wedge R(x, z) \wedge W(y) \to W(z))$