Lógica de Predicados, Semántica

Dante Zanarini

LCC

28/09/2015

¿Qué queremos?

- La clase pasada definimos la sintaxis de la lógica de predicados
- Vimos que el conjunto $\textsc{Form}$ está parametrizado por una **signatura** $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$
- Ahora estamos interesados en darle significado a una fórmula en $\textsc{Form}_{(\mathcal{F},\mathcal{P})}$
- Es decir, buscamos una relación $\mathcal{M} \models \phi$, donde $\mathcal{M}$ es una estructura que nos permite darle significado a términos y fórmulas

Algunos ejemplos de signaturas

Ejemplo (Aritmética)

$$\begin{array}{ll} \mathcal{F} = \{\overline{Z}, \overline{S}, \bar{+}, \bar{\times}\} & \textit{con } \mathrm{ar}(\overline{Z}) = 0, \mathrm{ar}(\overline{S}) = 1, \mathrm{ar}(\bar{+}) = \mathrm{ar}(\bar{\times}) = 2 \\ \mathcal{P} = \{=, \bar{<}\} & \textit{con } \mathrm{ar}(=) = \mathrm{ar}(\bar{<}) = 2 \end{array}$$

Algunas fórmulas

- *La constante es neutro para $\bar{+}$:*

$$\forall x \, (x \,\bar{+}\, \overline{Z} = x)$$

- *La constante es absorvente para $\bar{\times}$*

$$\forall x \, (x \bar{\times} \overline{Z} = \overline{Z})$$

- *Hay un elemento mínimo:*

$$\exists x \, (\forall y \, \neg(x = y) \rightarrow x \bar{<} y)$$

Algunos ejemplos de signaturas

Ejemplo (Teoría de Conjuntos)

$$\begin{array}{ll} \mathcal{F} = \{\bar{\emptyset}\} & \textit{con } \mathrm{ar}(\bar{\emptyset}) = 0 \\ \mathcal{P} = \{\overline{\mathrm{Set}}, \bar{\in}, =\} & \textit{con } \mathrm{ar}(\overline{\mathrm{Set}}) = 1, \mathrm{ar}(\bar{\in}) = \mathrm{ar}(=) = 2 \end{array}$$

Algunas fórmulas:

- *Extensionalidad*

$$\forall x \forall y \left(\overline{\mathrm{Set}}(x) \wedge \overline{\mathrm{Set}}(y) \wedge (\forall z\ z \bar{\in} x \leftrightarrow z \bar{\in} y\right) \rightarrow x = y)$$

- *Conjunto vacío*

$$\overline{\mathrm{Set}}\ (\bar{\emptyset}) \wedge \forall x \neg \left(x \in \bar{\emptyset}\right)$$

- *Axioma de emparejamiento*

$$\forall x \forall y\, \exists z\ \left(\overline{\mathrm{Set}}(z) \wedge (\forall w\, w \in z \leftrightarrow w = x \vee w = y)\right)$$

Interpretación de Fórmulas

- En proposicional, la interpretación (semántica) de una fórmula dependía de una **valuación**
- Esta valuación nos decía cómo interpretar los elementos atómicos de una fórmula
- En predicados, usaremos una interpretación o modelo para darle semántica a una fórmula
- Un modelo debe proveer significado tanto a los términos como a las fórmulas

Modelos, definición formal

Definición (Modelo)

Sea $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ *una signatura. Un* *modelo* *o* *interpretación* $\mathcal{M}$ *para* $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ *consiste en:*

- *Un conjunto no vacío* A*, llamado* **universo**
- *Para cada constante* $c \in \mathcal{F}$*, un elemento* $c^{\mathcal{M}} \in A$
- *Para cada símbolo* $f \in \mathcal{F}$ *con* $\mathrm{ar}(f) = n > 0$*, una función* $f^{\mathcal{M}} : A^n \to A$
- *Para cada símbolo de predicados* $P \in \mathcal{P}$*, un conjunto* $P^{\mathcal{M}} \subseteq A^n$*. Es decir, una relación* n*-aria sobre* A*.*

Ejemplos

- Sea la signatura $(\emptyset, \{E\})$ con $\mathrm{ar}(E) = 2$
- Un modelo viene dado por un conjunto A junto con una relación binaria $E^{\mathcal{M}}$ sobre A.
- Es decir, un modelo es un **grafo dirigido**
- Por ejemplo, $A = \{a, b, c\}$, $E^{\mathcal{M}} = \{(a, b), (b, a), (c, a), (c, c)\}$
- En este modelo, nos gustaría que la fórmula

$$\phi \equiv \forall x \exists y \, E(x, y)$$

  sea válida.
- Observemos que si $E^{\mathcal{M}} = \{(a, b), (b, a), (a, c)\}$, entonces ϕ no es válida

Ejemplos - Aritmética

- Un modelo $\mathcal{M}$ para la aritmética:
  - $A = \mathbb{N}$,
  - $\overline{Z}^{\mathcal{M}} = 0$
  - $\overline{S}^{\mathcal{M}}$ es tal que $S^{\mathcal{M}}(n) = n + 1$,
  - $\bar{+}^{\mathcal{M}} = +$, $\bar{\times}^{\mathcal{M}} = \times$
  - $=^{\mathcal{M}} = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a = b\}$
  - $\bar{<}^{\mathcal{M}} = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a < b\}$
- En este modelo, nos gustaría que

$$\exists x, \overline{S}(x) < x$$

no sea válida ($\mathcal{M} \not\models \exists x, \overline{S}(x) < x$).

Ejemplos - Aritmética

- Consideremos ahora el modelo $\mathcal{M}'$ para la aritmética:
  - $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$,
  - $\overline{Z}^{\mathcal{M}'} = 0$
  - $\overline{S}^{\mathcal{M}'}$ es tal que $\overline{S}^{\mathcal{M}'}(n) = (n + 1) \mod 5$,
  - $a \bar{+}^{\mathcal{M}'} b = (a + b) \mod 5$, $a \bar{\times}^{\mathcal{M}'} b = (a \times b) \mod 5$
  - $=^{\mathcal{M}'} = \left\{(a, b) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}^2 \mid a = b\right\}$
  - $\bar{<}^{\mathcal{M}'} = \left\{(a, b) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}^2 \mid a < b\right\}$
- En este modelo, nos gustaría que

$$\exists x, \overline{S}(x) < x$$

sea válida ($\mathcal{M}' \models \exists x, \overline{S}(x) < x$).

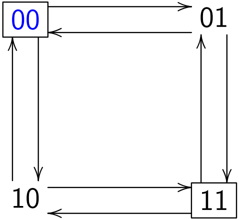
Igualdad

- Hasta ahora hemos tratado a la igualdad como un símbolo de predicados de aridad 2
- Sin embargo, es usual tratarla de un modo especial, dado que siempre tendrá la misma semántica en todos los modelos
- Por lo tanto, agregaremos explícitamente la siguiente regla de formación de fórmulas:
  - Si $t, t' \in \mathrm{TERM}$ entonces $t = t' \in \textsc{Form}$
- Además, para un modelos $\mathcal{M}$ con universo A, definimos
  - $=^{\mathcal{M}} = \{(a, b) \in A^2 \mid a = b\}$
- Esto nos ahorra tener que incorporar el símbolo $=$ en las signaturas, además de luego dar su interpretación $=^{\mathcal{M}}$ en cada modelo.

Más ejemplos - autómatas

- Sea la signatura $(\mathcal{F}, \mathcal{P}) = (\{i\}, \{R, F\})$, con $\mathrm{ar}(i) = 0$, $\mathrm{ar}(R) = 2$, $\mathrm{ar}(F) = 1$.
- Un modelo $\mathcal{M}$ para esta signatura viene dado por
  - Un conjunto S (que llamaremos estados)
  - Un elemento $i^{\mathcal{M}}$ (estado inicial)
  - Una relación binaria $R^{\mathcal{M}}$ (relación de transición)
  - Un subconjunto de S, $F^{\mathcal{M}}$ (estados finales).

  Por ejemplo, un posible modelo con $S = \{00, 01, 10, 11\}$, $i^{\mathcal{M}} = 00$:



- Valen las siguientes fórmulas en el modelo?
  - $\forall x(R(i, x) \to \neg F(x))$
  - $\exists x R(x, x)$
  - $\exists x(R(i, x) \wedge R(x, i) \wedge \neg(i = x))$

Validez en un modelo

- En los ejemplos, vimos que una sentencia puede ser cierta o falsa de acuerdo al modelo que consideremos para interpretarla
- Ahora intentaremos definir la idea de ϕ es válida en $\mathcal{M}$
- Para lograrlo, deberemos definir una relación más general. Sean:
  - $\phi \in \textsc{Form}_{(\mathcal{F},\mathcal{P})}$
  - $\mathcal{M}$ un modelo para $(\mathcal{F},\mathcal{P})$ con universo $|\mathcal{M}|$
  - $s : \mathrm{Var} \to |\mathcal{M}|$, que mapea variables en valores del universo
- Definiremos la semántica de ϕ en $\mathcal{M}$, s:

$$[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s} \in \{F, T\}$$

- ¿De dónde salió s? ¿Es necesaria? ¿Por qué?

Interpretación de los términos

- Para darle un significado a las *fórmulas*, debemos primero *interpretar los términos*
- Observemos que, a partir de s y $\mathcal{M}$, podemos asignarle un valor en $|\mathcal{M}|$ a cada término t

Definición (Interpretación de términos)

Sea $\mathcal{M}$ un modelo para $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$, y $s : \mathrm{Var} \to |\mathcal{M}|$. Definimos $[\![t]\!]_{\mathcal{M},s}$ por recursión en t:

$$
\begin{array}{lcll}
[\![x_i]\!]_{\mathcal{M},s} & = & s(x_i) & \\
[\![c]\!]_{\mathcal{M},s} & = & c^{\mathcal{M}} & \textit{si } \mathrm{ar}(c) = 0 \\
[\![f(t_1, \ldots, t_n)]\!]_{\mathcal{M},s} & = & f^{\mathcal{M}}([\![t_1]\!]_{\mathcal{M},s}, \ldots [\![t_n]\!]_{\mathcal{M},s}) & \textit{si } \mathrm{ar}(f) = n > 0
\end{array}
$$

Interpretación de términos, ejemplos

- Consideremos la signatura para la aritmética, y el modelo visto antes con $|\mathcal{M}| = \mathbb{N}$.
- Sean $t_1 = (x_1 \bar{+} \overline{S}(\overline{Z})) \bar{\times} x_2$ y $t_2 = (\overline{S}\overline{S}(\overline{Z}) \bar{\times} \overline{S}(\overline{S}(\overline{Z})))$
- Y definimos $s : \mathrm{Var} \to |\mathcal{M}|$ tal que $s(x_1) = 5$, $s(x_2) = 7$, $s(x_{n+2}) = 1$
- Entonces

$$[\![t_1]\!]_{\mathcal{M},s} = 42 \text{ y } [\![t_2]\!]_{\mathcal{M},s} = 4$$

- Observemos que, para todas s, s', $[\![t_2]\!]_{\mathcal{M},s} = [\![t_2]\!]_{\mathcal{M},s'}$, pues t_2 no tiene variables.

Semántica de fórmulas atómicas

Ahora sí podemos definir $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s}$.

(1) Igualdad:

$$[\![t_1 = t_2]\!]_{\mathcal{M},s} = T \quad \text{sii} \quad [\![t_1]\!]_{\mathcal{M},s} = [\![t_2]\!]_{\mathcal{M},s}$$

(2) Predicados: Si P es un símbolo de predicados de aridad n,

$$[\![P(t_1, \ldots, t_n)]\!]_{\mathcal{M},s} = T \quad \text{sii} \quad \left([\![t_1]\!]_{\mathcal{M},s}, \ldots, [\![t_n]\!]_{\mathcal{M},s}\right) \in P^{\mathcal{M}}$$

(3) Bottom:

$$[\![\perp]\!]_{\mathcal{M},s} = F$$

(4) Predicados de aridad 0: Más adelante

Conectivos

(5) Conjunción

$$[\![\phi_1 \wedge \phi_2]\!]_{\mathcal{M},s} = \min\left\{[\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},s}\,, [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M},s}\right\}$$

(6) Disyunción

$$[\![\phi_1 \vee \phi_2]\!]_{\mathcal{M},s} = \max\left\{[\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},s}\,, [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M},s}\right\}$$

(7) Negación

$$[\![\neg\phi_1]\!]_{\mathcal{M},s} = T \quad \text{sii} \quad [\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},s} = F$$

(8) Implicancia

$$[\![\phi_1 \to \phi_2]\!]_{\mathcal{M},s} = T \quad \text{sii} \quad [\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},s} \leq [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M},s}$$

Cuantificadores

(9) Cuantificador universal:

$$[\![\forall x_i \phi]\!]_{\mathcal{M},s} = \min \left\{ [\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s[x_i \mapsto a]} \mid a \in |\mathcal{M}| \right\}$$

- Donde $s[x_i \mapsto a] : \mathrm{Var} \to |\mathcal{M}|$ se define como:

$$s[x_i \mapsto a](x_j) = \begin{cases} a & \text{si } i = j \\ s(x_j) & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

- Es decir, $s[x_i \mapsto a]$ es un nuevo entorno, que coincide con s en todas las variables, salvo (quizás) en x_i, donde vale a.

(10) Cuantificador existencial

$$[\![\exists x_i \phi]\!]_{\mathcal{M},s} = \max \left\{ [\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s[x_i \mapsto a]} \mid a \in |\mathcal{M}| \right\}$$

- Ejemplos!

Limitando la dependencia con los entornos

Teorema

Sean $s, s' : \mathrm{Var} \to |\mathcal{M}|$. *Si* s *y* s' *coinciden en todas las variables libres de* ϕ, *entonces*

$$[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s} = [\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s'}$$

Demostración: Por inducción en ϕ *(necesitaremos un resultado similar para términos también).*

Corolario

Sea $\mathcal{M}$ *un modelo. Si* ϕ *es una sentencia, entonces:*

(a) *Para toda* s, $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s} = T$, *o*

(b) *Para toda* s, $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s} = F$

Es decir, la semántica de una sentencia no depende de los entornos, sólo del modelo.

Validez en un modelo

Definición

Sea $\Sigma = (\mathcal{F}, \mathcal{P})$ una signatura, $\phi \in \text{FORM}_\Sigma$, y $\mathcal{M}$ un modelo para Σ. Decimos que $\mathcal{M}$ es un modelo para ϕ (equivalentemente, ϕ es válida en $\mathcal{M}$), y lo notamos $\mathcal{M} \models \phi$ sii

$$\textit{Para toda } s, [\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s} = T$$

- Si Δ es un conjunto de sentencias, decimos que $\mathcal{M}$ es un modelo de Δ ($\mathcal{M} \models \Delta$) sii $\mathcal{M}$ es un modelo de ψ, para cada $\psi \in \Delta$.

Consecuencia semántica

Definición

Si $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq \textsc{Sent}$, *entonces*

$$\Gamma \models \phi \text{ sii cada modelo de } \Gamma \text{ es un modelo de } \phi$$

.

Veamos ejemplos