Lógica Proposicional, Semántica

Dante Zanarini

LCC

12/08/2015

Lógica Proposicional como Lenguaje Formal

- Haremos un repaso de algunas ideas de primer año y LFyC.
- Recordemos que para definir formalmente un lenguaje necesitamos **un alfabeto**.
- Para nosotros, estará formado por:
  - *Variables proposicionales:* $\{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$
  - *Conectivos:* $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \bot$
  - *Símbolos auxiliares:* : $($, $)$

¿Es un alfabeto?

Definición Formal

Definición 1 (PROP)

El conjunto PROP *de proposiciones es el mínimo conjunto* X *con las siguientes propiedades:*

(I) $p_i \in X \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad \bot \in X.$

(II) *Si* $\phi, \psi \in X$ *entonces* $(\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \to \psi) \in X.$

(III) *Si* $\phi \in X$ *entonces* $(\neg\phi) \in X.$

- Al conjunto de variables proposicionales p_i lo llamaremos de **proposiciones atómicas**, y lo indicaremos con AT.
- Usaremos el símbolo $\square$ para denotar a cualquiera de los conectivos $\wedge, \vee, \to$.

Ejercicio: Enunciar el Principio de Inducción Primitiva sobre PROP.

¿Qué significa **Mínimo Conjunto**?

Ejemplo 1

1. $(p_{14} \vee p_4) \in \textsc{Prop}$
2. $((\bot \wedge (\neg p_3)) \rightarrow p_2) \in \textsc{Prop}$
3. $p_1 \wedge p_8 \notin \textsc{Prop}$
4. $\neg\neg\bot \notin \textsc{Prop}$

- ¿Cómo se prueban (1), (2)?
- ¿Y (3), (4)?

Formación de Fórmulas

Definición 2 (Secuencia de Formación)

Una secuencia $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n$ *es una* **secuencia de formación** *para* $\phi \in \textsc{Prop}$ *sii*

- $\phi_n = \phi$, *y*
-
$$\begin{aligned} \forall i \leq n,\ \ & \phi_i \in AT \ \text{ o } \ \phi_i = \bot \\ & \phi_i = (\phi_k \,\square\, \phi_j) \text{ para ciertos } k, j < i, \ \ \text{o} \\ & \phi_i = (\neg \phi_j) \text{ para algún } j < i \end{aligned}$$

Secuencias de Formación

Ejemplo 2

$$p_1, p_2, (\neg p_1), ((\neg p_1) \wedge p_2)$$

es una secuencia de formación para

$$((\neg p_1) \wedge p_2)$$

- Observemos que

$$\bot, p_1, p_3, (p_1 \wedge p_3), p_2, (\neg p_1), (p_2 \to \bot), ((\neg p_1) \wedge p_2)$$

también es una secuencia de formación para la misma fórmula.

Teorema 1

Una fórmula tiene una secuencia de formación sii pertenece a $\textsc{Prop}$.

Semántica

- Las fórmulas de PROP son *elementos sintácticos*.
- Para darles significado debemos *interpretarlas*, es decir, asignarles un valor de verdad.

Definición 3 (Valores de verdad)

El conjunto de valores de verdad tiene exactamente dos elementos:
T *(true, verdadero) y* F *(false, falso).*

- Asumiremos una relación de orden $\leq$ sobre los valores de verdad tal que $F \leq T$.

Semántica

- La tarea de darle significado a una fórmula puede encararse de manera **composicional**.

- Por ejemplo, conociendo el valor de verdad de ϕ, ψ, podemos dar el valor de verdad de $(\phi \vee \psi)$.

- ¿Qué significado le damos a las proposiciones atómicas?

  - *"En esta clase hay 32 personas."*

  - *"Entre dos números distintos a, b, siempre puedo encontrar un número c en el medio."*

  - *"Algunos perros tienen cuatro patas."*

Semántica, proposiciones atómicas

- Para interpretar una proposición atómica, debemos ir al mundo real, o al modelo que tengamos de él, y decidir si asignarle T o F.

Definición 4 (Valuación)

Una **valuación** *o* **modelo proposicional** *es una función*

$$v : AT \to \{T, F\}.$$

Una valuación asigna un valor de verdad a cada proposición atómica.

- La semántica de las fórmulas de $\textsc{Prop}$ dependerá de una valuación.

Semántica para $\textsc{Prop}$, definición formal

Definición 5

Sea v una valuación. Definimos la función

$$[\![\ ]\!]_v : \textsc{Prop} \to \{T, F\}$$

por inducción en $\textsc{Prop}$*:*

$$\begin{array}{lcl}
[\![\bot]\!]_v & = & F \\
[\![p_i]\!]_v & = & v(p_i) \\
[\![(\phi \wedge \psi)]\!]_v & = & \text{mín}([\![\phi]\!]_v, [\![\psi]\!]_v) \\
[\![(\phi \vee \psi)]\!]_v & = & \text{máx}([\![\phi]\!]_v, [\![\psi]\!]_v) \\
[\![(\phi \to \psi)]\!]_v & = & T \quad \textit{sii} \quad [\![\phi]\!]_v \leq [\![\psi]\!]_v \\
[\![(\neg\phi)]\!]_v & = & F \quad \textit{sii} \quad [\![\phi]\!]_v = T
\end{array}$$

Observemos que esta definición es similar a las tablas de verdad vistas en primer año.

Definiciones adicionales

Definición 6 (Tautología)

Una fórmula $\phi \in \textsc{Prop}$ *es una* **tautología** *sii* $[\![\phi]\!]_v = T$ *para toda valuación* v.

Definición 7 (Contradicción)

Una fórmula $\phi \in \textsc{Prop}$ *es una* **contradicción** *sii* $[\![\phi]\!]_v = F$ *para toda valuación* v.

Definición 8 (Fórmula Satisfactible)

Una fórmula $\phi \in \textsc{Prop}$ *es* **satisfactible** *sii* $[\![\phi]\!]_v = T$ *para alguna valuación* v.

Convenciones sintácticas

Cuando no haya lugar a ambigüedades:

- omitiremos los paréntesis más externos de una fórmula
- usaremos el siguiente orden de precedencia: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$

Ejemplo 3

Escribiremos

$$p_1 \vee \neg p_2 \rightarrow p_3$$

en lugar de

$$((p_1 \vee (\neg p_2)) \rightarrow p_3)$$

- Sea v una valuación. Extendemos la definición de $[\![\ ]\!]_v$ a conjuntos:

$$[\![\Gamma]\!]_v = T \text{ sii para toda } \phi \in \Gamma,\ [\![\phi]\!]_v = T.$$

Convenciones sintácticas

Definimos el operador $\leftrightarrow$ de la siguiente forma:

$$(\phi \leftrightarrow \psi) \equiv (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$$

Ejercicio: Probar que $[\![\phi \leftrightarrow \psi]\!]_v = T$ sii $[\![\phi]\!]_v = [\![\psi]\!]_v$.

Consecuencia Semántica

Definición 9

Definimos la relación $\models \subseteq \mathcal{P}(\textsc{Prop}) \times \textsc{Prop}$:

$$\Gamma \models \phi \ \textit{ sii para toda valuación } v, \textit{ si } [\![\Gamma]\!]_v = T \textit{ entonces } [\![\phi]\!]_v = T.$$

Diremos que ϕ *es una* ***consecuencia semántica*** *de* Γ.

Notación: escribiremos

- $\models \phi$ para indicar que ϕ es una tautología
- $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi$ en lugar de $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \models \psi$

Ejemplo 4

1. $\phi, \psi \models \phi \wedge \psi$
2. $\phi, \phi \to \psi \models \psi$
3. $\neg\phi \vee \psi, \phi \models \psi$

Sustitución

$\phi[\psi/p_i]$ denota a la proposición obtenida al reemplazar todas las ocurrencias de p_i en ϕ por ψ. Definimos $\phi[\psi/p_i]$ por inducción en PROP:

$$
\begin{array}{lcl}
\perp[\psi/p_i] & = & \perp \\
p_j[\psi/p_i] & = & \begin{cases} \psi & \text{si } i = j \\ p_j & \text{si } i \neq j \end{cases} \\
(\phi_1 \square \phi_2)[\psi/p_i] & = & \phi_1[\psi/p_i] \square \phi_2[\psi/p_i] \\
(\neg\phi)[\psi/p_i] & = & \neg(\phi[\psi/p_i])
\end{array}
$$

Teorema 2 (Teorema de Sustitución)

Sean $\phi_1, \phi_2 \in \mathrm{PROP}$, $p \in AT$.

Si $\models \phi_1 \leftrightarrow \phi_2$, *entonces* $\models \psi[\phi_1/p] \leftrightarrow \psi[\phi_2/p] \quad \forall \psi \in \mathrm{PROP}$.

Lógica como álgebra

- Como consecuencia del teorema de sustitución, podemos usar nuestro modelo para razonar algebraicamente sobre $\textsc{Prop}$.
- Definimos la relación $\approx \subseteq \textsc{Prop} \times \textsc{Prop}$ tal que

$$\phi \approx \psi \quad \text{sii} \quad \models \phi \leftrightarrow \psi$$

- La relación $\approx$ es de equivalencia.

Conjuntos Completos de Conectivos

- Un conjunto A de conectivos se dice completo si, para cada fórmula ϕ, existe ψ tal que:

  1. ψ utiliza únicamente conectivos de A, y
  2. $\models \psi \leftrightarrow \phi$

- Algunos conjuntos completos de conectivos: $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$.

- Algunos que no son completos: $\{\vee, \wedge\}$, $\{\perp, \wedge\}$.