Cátedra: Cálculo I
Carreras: Licenciatura en Matemática - Profesorado en Matemática
Profesora: Dra. María del Carmen Varaldo

---

APUNTE DE CÁTEDRA

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

# 1. Primitivas de las funciones racionales

## 1.1. Funciones racionales elementales

**a)** Calculamos $\int \dfrac{dx}{(x-a)^n}$ para $n \geq 1$.

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \begin{cases} \dfrac{1}{-n+1}(x-a)^{-n+1} + C = \dfrac{1}{-n+1}\ \dfrac{1}{(x-a)^{n-1}} + C & \text{si } n > 1, \\ \\ \ln|x-a| + C & \text{si } n = 1, \end{cases}$$

donde $\quad C \in \mathbb{R}$.

**b)** Calculamos $\int \dfrac{y}{(y^2+1)^n}\ dy$ para $n \geq 1$.

Usamos la sustitución $u = y^2 + 1$ con $du = 2y\ dy$. Entonces,

$$\int \frac{y}{(y^2+1)^n}\ dy = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^n}\ du = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-n)}\ \dfrac{1}{u^{n-1}} + C = \dfrac{1}{2(1-n)}\ \dfrac{1}{(y^2+1)^{n-1}} + C, & \text{si } n > 1, \\ \\ \dfrac{1}{2}\ln|u| + C = \dfrac{1}{2}\ln(y^2+1) + C & \text{si } n = 1, \end{cases}$$

donde $\quad C \in \mathbb{R}$.

**c)** Calculamos $I_n = \int \dfrac{1}{(y^2+1)^n}\ dy$ para $n \geq 1$.

Para $n > 1$ tenemos

$$I_n = \int \frac{1+y^2-y^2}{(y^2+1)^n}\ dy = \int \frac{1}{(y^2+1)^{n-1}}\ dy - \int \frac{y^2}{(y^2+1)^n}\ dy = I_{n-1} - \int \frac{y^2}{(y^2+1)^n}\ dy. \qquad (1)$$

Para el cálculo de la segunda integral aplicamos integración por partes. Llamamos $u = y$ y $dv = \dfrac{y}{(y^2+1)^n}\ dy$, resultando $v = \dfrac{1}{2(-n+1)}\ \dfrac{1}{(y^2+1)^{n-1}}$. Luego,

$$\begin{aligned} \int \frac{y^2}{(y^2+1)^n}\ dy &= \frac{1}{2(-n+1)}\ \frac{y}{(y^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2(-n+1)}\int \frac{1}{(y^2+1)^{n-1}}\ dy \\ &= \frac{-1}{2(n-1)}\ \frac{y}{(y^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\ I_{n-1}. \end{aligned} \qquad (2)$$

Reemplazando por (2) en (1) nos queda

$$I_n = I_{n-1} - \frac{1}{2(n-1)}\ I_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)}\ \frac{y}{(y^2+1)^{n-1}} = \frac{2n-3}{2n-2}\ I_{n-1} + \frac{1}{2n-2}\ \frac{y}{(y^2+1)^{n-1}}.$$

Para el caso $n = 1$ tenemos

$$I_1 = \int \frac{1}{y^2+1}\, dy = \arctan y + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

**d)** Consideremos el caso general

$$\int \frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n}\, dx \text{ para } n \geq 1,\ a > 0 \text{ y } \Delta = b^2 - 4ac < 0.$$

Notemos que, bajo estas hipótesis, $ax^2 + bx + c > 0$.

Recordemos que $ax^2+bx+c = a\Big(\Big(x+\dfrac{b}{2a}\Big)^2 + \dfrac{-\Delta}{4a^2}\Big) = \dfrac{-\Delta}{4a}\Big(\Big(\dfrac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\Big)^2 + 1\Big)$.

Haciendo el cambio de variable $y = \dfrac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}$, o sea, $x = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\, y - \dfrac{b}{2a}$, tenemos que

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= \frac{-\Delta}{4a}\big(y^2+1\big), \\ px+q &= p\,\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\, y - p\,\frac{b}{2a} + q = ry + s, \\ dx &= \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\, dy. \end{aligned}$$

Aplicando esta sustitución en la integral nos queda

$$\int \frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n}\, dx = \frac{(-\Delta)^{3/2}}{8a^2}\int \frac{ry+s}{(y^2+1)^n}\, dy = \frac{(-\Delta)^{3/2}}{8a^2}\Big(r\int \frac{y}{(y^2+1)^n}\, dy + s\int \frac{1}{(y^2+1)^n} dy\Big).$$

Para completar los cálculos utilizamos los casos b) y c). Finalmente, debemos escribir todos los términos de la expresión obtenida en función de la variable $x$.

## 1.2. Funciones racionales

Nos proponemos encontrar las primitivas de la función racional $f(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ donde $P_m$ y $Q_n$ son polinomios de grados $m$ y $n$, respectivamente.

**a)** $\mathbf{m \geq n}$.

Al realizar el cociente entre ambos polinomios nos queda $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)} = C(x) + \dfrac{R(x)}{Q_n(x)}$ donde $\mathrm{gr}(R) < n$. Luego,

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\, dx = \int C(x)\, dx + \int \frac{R(x)}{Q_n(x)}\, dx.$$

**b)** $\mathbf{m < n}$.

**i) El denominador es un producto de factores lineales distintos**:

$$Q_n(x) = (x-x_1)\dots(x-x_n).$$

Aplicando descomposición en fracciones simples tenemos

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-x_n}.$$

Luego, nos queda

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\,dx = A_1 \ln|x-x_1| + A_2 \ln|x-x_2| + \cdots + A_n \ln|x-x_n| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Como ejemplo resolvemos $\int \dfrac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}$.

Observamos que $x^3+x^2-2x = x(x-1)(x+2)$ y la función racional podemos escribirla así:

$$\frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+2}.$$

Haciendo los cálculos correspondientes hallamos que $A_1 = \dfrac{1}{2}$, $A_2 = 2$, $A_3 = \dfrac{1}{2}$. Finalmente tenemos que

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx + 2\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\ln|x| + 2\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+2| + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

**ii) El denominador es un producto de factores lineales no todos distintos**.

Por ejemplo, calculemos $\int \dfrac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$.

En este caso debemos encontrar $A_1$, $A_2$, $A_3$ tales que

$$\frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{(x+1)^2}.$$

Haciendo los cálculos correspondientes hallamos que $A_1 = \dfrac{3}{2}$, $A_2 = -\dfrac{1}{2}$, $A_3 = -1$. Finalmente tenemos que

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2}\,dx &= \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx \\ &= \frac{3}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{x+1}.\end{aligned}$$

En general, si un factor lineal de la forma $(x+a)$ aparece $p$ veces en el denominador, para este factor debemos tomar una suma de $p$ términos, es decir,

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{A_k}{(x+a)^p}. \tag{3}$$

**iii) El denominador contiene factores cuadráticos irreducibles ninguno de los cuales se repite**.

Por ejemplo, calculemos $\int \dfrac{3x^2+2x-2}{x^3-1}\,dx$.

El denominador puede descomponerse como $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$, donde $x^2+x+1$ es irreducible. Luego tenemos la siguiente descomposición en fracciones simples:

$$\frac{3x^2+2x-2}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B\ x+C}{x^2+x+1}.$$

Haciendo los cálculos correspondientes hallamos que $A=1,\ B=2,\ C=3$.
Por lo tanto, tenemos que

$$\int \frac{3x^2+2x-2}{x^3-1}\ dx=\int \frac{1}{x-1}\ dx+\int \frac{2x+3}{x^2+x+1}\ dx.$$

La primera integral del segundo miembro es $\ln|x-1|$. Para calcular la segunda integral escribimos

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+3}{x^2+x+1}\ dx&=\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\ dx+\int \frac{2}{x^2+x+1}\ dx\\&=\ln|x^2+x+1|+2\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\ dx.\end{aligned}$$

Resolvamos, ahora, la última integral.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\ dx&=\frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\ dx\\&=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C,\quad C\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, nos queda

$$\int \frac{2x+3}{x^2+x+1}\ dx=\ln(x^2+x+1)+\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C,$$

y, finalmente ,

$$\int \frac{3x^2+2x-2}{x^3-1}\ dx=\ln|x-1|+\ln(x^2+x+1)+\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C,\quad C\in\mathbb{R}.$$

iv) **El denominador contiene factores cuadráticos irreducibles algunos de los cuales están repetidos**.

Este caso es análogo a ii). Suponemos que es posible una descomposición de $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ en fracciones simples, de forma tal que por cada factor simple de $Q_n(x)$ tenemos una suma del tipo (3) y por cada factor cuadrático irreducible tenemos una suma del tipo

$$\sum_{k=1}^{s}\frac{B_k\ x+C_k}{(x^2+bx+c)^k}. \tag{4}$$

Resolvamos la siguiente integral

$$\int \frac{x^4-x^3+2x^2-x+2}{(x-1)(x^2+2)^2}\ dx.$$

La descomposición en fracciones simples es de la forma

$$\frac{x^4-x^3+2x^2-x+2}{(x-1)(x^2+2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B\ x+C}{x^2+2}+\frac{D\ x+E}{(x^2+2)^2}.$$

Haciendo los cálculos correspondientes hallamos que $A = \frac{1}{3},\ B = \frac{2}{3},\ C = -\frac{1}{3},\ D = -1,\ E = 0.$
Por lo tanto, nos queda

$$\int \frac{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 2}{(x-1)(x^2+2)^2}\ dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\ dx + \frac{1}{3}\int \frac{2x-1}{x^2+2}\ dx - \int \frac{x}{(x^2+2)^2}\ dx,$$

Aplicando los casos anteriores llegamos a

$$\int \frac{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 2}{(x-1)(x^2+2)^2}\ dx = \frac{1}{3}\ \ln|x-1| + \frac{1}{3}\ \ln(x^2+2) - \frac{1}{3\sqrt{2}}\ \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}\ (x^2+2)^{-1} + C,$$

donde $C \in \mathbb{R}$.

## 2. Otras técnicas de sustitución

**a)** Si el integrando contiene $\sqrt[n]{g(x)}$, una sustitución posible es $u = \sqrt[n]{g(x)}$.

Por ejemplo, planteamos calcular $I = \int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\ dx$.

Aplicamos la sustitución $u = \sqrt{x+4}$. En este caso tenemos

$$x = u^2 - 4, \qquad dx = 2\ u\ du.$$

Luego, $I = \int \frac{u}{u^2-4}\ 2\ u\ du = 2\int \frac{u^2}{u^2-4}\ du = 2\int 1\ du + 2\int \frac{4}{u^2-4}\ du = 2\ u + 8\int \frac{1}{u^2-4}\ du.$

La última integral podemos resolverla usando descomposición en fracciones simples. Finalmente, nos queda

$$\begin{aligned} I &= 2\ u + 2\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right| + C \\ &= 2\ \sqrt{x+4} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| + C, \end{aligned}$$

donde $C \in \mathbb{R}$.

**b)** Si el integrando contiene $\sqrt[n]{g(x)}$ y $\sqrt[m]{g(x)}$, una sustitución posible es $u = \sqrt[p]{g(x)}$ donde $p = m.c.m.(n, m)$.

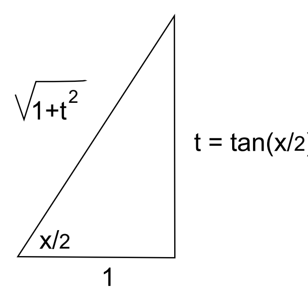
**c)** Toda función racional de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ pasa a ser una función racional ordinaria si hacemos la sustitución $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

$$x = 2\ \arctan(t), \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}\ dt,$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\operatorname{sen}(x) = 2\ \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$



Como ejemplo, calculemos $I = \int \dfrac{1}{3\ \operatorname{sen} x - 4\ \cos x}\ dx$.

Aplicamos la sustitución anterior y nos queda

$$I = \int \frac{1+t^2}{6t-4(1-t^2)}\ \frac{2}{1+t^2}\ dt = \int \frac{2}{6t-4+4t^2}\ dt = \int \frac{1}{2t^2+3t-2}\ dt$$

Observemos que $2t^2+3t-2 = 2(t+2)(t-\frac{1}{2}) = (t+2)(2t-1)$. Si planteamos

$$\frac{1}{2t^2+3t-2} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{2t-1}$$

tenemos que $A = -\dfrac{1}{5}$ y $B = \dfrac{2}{5}$. Luego,

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{5}\ \int \frac{dt}{t+2} + \frac{2}{5}\int \frac{dt}{2t-1} \\ &= -\frac{1}{5}\ \ln|t+2| + \frac{1}{5}\ln|2t-1| + C \\ &= -\frac{1}{5}\ \ln\left|\tan(\frac{x}{2})+2\right| + \frac{1}{5}\ln\left|2\tan(\frac{x}{2})-1\right| + C, \end{aligned}$$

donde $C \in \mathbb{R}$.

**d) Sustituciones trigonométricas**

En la siguiente tabla, presentamos las sustituciones trigonométricas que se pueden aplicar a las expresiones radicales dadas. Debemos tener en cuenta que las restricciones para el parámetro $t$ en cada caso, permiten definir la relación inversa, es decir, escribir $t$ en función de $x$.

| Expresión | Sustitución | Identidad |
|---|---|---|
| $\sqrt{a^2-x^2}$ | $x = a\operatorname{sen} t, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ | $1-\operatorname{sen}^2 t = \cos^2 t$ |
| $\sqrt{a^2+x^2}$ | $x = a\tan t, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ | $1+\tan^2 t = \sec^2 t$ |
| $\sqrt{x^2-a^2}$ | $x = a\sec t, \quad 0 \leq t < \frac{\pi}{2}$ o $\pi \leq t < \frac{3\pi}{2}$ | $\sec^2 t - 1 = \tan^2 t$ |

A modo de ejemplo, planteamos calcular $I = \int \dfrac{x^2}{\sqrt{5-4x^2}}\ dx$.

Primero aplicamos la sustitución $u = 2x$ o equivalentemente, $x = \frac{1}{2}u$ y $dx = \frac{1}{2}\ du$. En este caso nos queda $I = \dfrac{1}{8}\int \dfrac{u^2}{\sqrt{5-u^2}}\ du$.

Ahora hacemos $u = \sqrt{5}\operatorname{sen} t$ siendo $du = \sqrt{5}\cos t\ dt$. Tenemos, entonces,

$$I = \frac{1}{8}\int \frac{(\sqrt{5}\operatorname{sen} t)^2}{\sqrt{5-5\operatorname{sen}^2 t}}\sqrt{5}\cos t\ dt = \frac{5}{8}\int \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\sqrt{5}\cos t}\sqrt{5}\cos t\ dt = \frac{5}{8}\int \operatorname{sen}^2 t\ dt.$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{5}{8}\int \operatorname{sen}^2 t \; dt \\
&= \frac{5}{8}\Big(-\frac{1}{2}\cos t \;\operatorname{sen} t + \frac{1}{2}\; t\Big) + C \\
&= -\frac{1}{16}\;\sqrt{5 - 5\operatorname{sen}^2 t}\;\sqrt{5}\operatorname{sen} t + \frac{5}{16}\; t + C \\
&= -\frac{1}{16}\;\sqrt{5 - u^2}\; u + \frac{5}{16}\;\operatorname{arc\,sen}\Big(\frac{u}{\sqrt{5}}\Big) + C \\
&= -\frac{1}{16}\;\sqrt{5 - 4x^2}\; 2x + \frac{5}{16}\;\operatorname{arc\,sen}\Big(\frac{2x}{\sqrt{5}}\Big) + C \\
&= -\frac{1}{8}\; x\sqrt{5 - 4x^2} + \frac{5}{16}\;\operatorname{arc\,sen}\Big(\frac{2x}{\sqrt{5}}\Big) + C
\end{aligned}
$$

donde $C \in \mathbb{R}$.

## Bibliografía

T. Apostol, "Calculus" - Vol. 1, Editorial Reverté, 2005.
J. Stewart, "Cálculo - Transcendentes tempranas", Cengage Learning Editores, S.A., 2008.