2) Sea $x = \frac{1}{y}$ y aplicamos 1), será $\ln 1 = \ln(\frac{1}{y}y) = \ln\left(\frac{1}{y}\right) + \ln y = 0$ luego

$$\ln\frac{1}{y} = -\ln y$$

3) ejercicio

4) Sean $g(x) = \ln x^r$ y $h(x) = r\ln x$ para $r \in \mathbb{Q}$. Como $g'(x) = \frac{1}{x^r} r x^{r-1} = \frac{r}{x}$ y $h'(x) = r\frac{1}{x} = \frac{r}{x}$ las funciones $g(x)$ y $h(x)$ difieren en una constante luego

$$\begin{aligned} g(x) &= h(x) + c \\ \ln x^r &= r\ln x + c \end{aligned}$$

pero si $x = 1$, $\ln 1^r = \ln 1 = 0 = r\ln 1 + c = 0 + c$ entonces $c = 0$ de donde

$$\ln x^r = r\ln x$$

$\square$

Gráfica de la función logaritmo.

Sea $g(x) = \ln x$ en $\mathbb{R}^+$.

1) Como $x > 0$, $g'(x) = \frac{1}{x} > 0$ es g estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$ y luego inyectiva en $\mathbb{R}^+$.

2) $g''(x) = \frac{-1}{x^2} < 0\ \forall x \in \mathbb{R}^+$, luego g es cóncava en $\mathbb{R}^+$.

3) Si $x > 1 \Rightarrow \ln x > \ln 1 = 0$ y si $0 < x < 1 \Rightarrow \ln x < \ln 1 = 0$

4) $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$. En efecto, dado $M > 0$, ¿existe $N > 0$ tal que si $x > N \Rightarrow \ln x > M$?

Como $M > 0$ y $\ln 2 > 0$ el principio de Arquímedes asegura que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

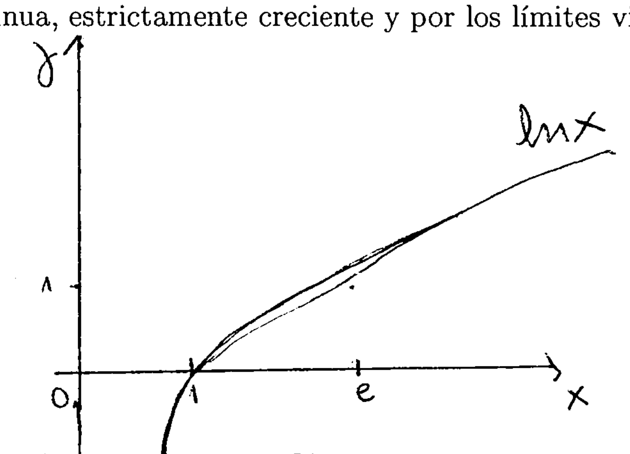
$$n\ln 2 > M \Rightarrow \ln 2^n > M$$

Por lo tanto si $x > 2^n$, $\ln x > \ln 2^n > M$. Basta tomar $N = 2^n \in \mathbb{N}$.

5) $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ (ejercicio, sugerencia considerar $x = \frac{1}{t}$)

6) $\operatorname{Im} g = \mathbb{R}$ por ser continua, estrictamente creciente y por los límites vistos anteriormente.

7) Gráfica



Observación: $\operatorname{Im} g = \mathbb{R}$, g inyectiva entonces $\exists!\ x > 0$ tal que $\ln x = 1$. Este número se denota con e. Es decir

$$\ln e = \int_1^e \frac{1}{t}dt = 1$$

e es un número irracional (constante de Euler) cuya aproximación decimal es

$$e \simeq 2{,}71828182846$$

La función exponencial.

La función $\ln x$ es inyectiva y por lo tanto invertible, definimos su función inversa.
Definición: Llamamos *función exponencial* a la función inversa del logaritmo natural. Es decir,

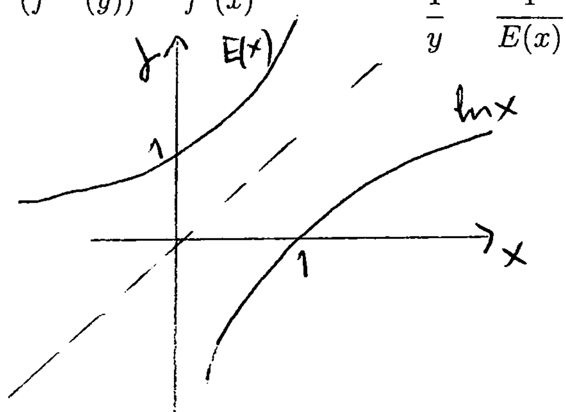
$$\begin{aligned} E &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x &\to E(x) = y \Leftrightarrow x = \ln y \end{aligned}$$

Propiedades:

1) $E(0) = 1$, $E(1) = e$
2) $E'(x) = E(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Dem: $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} = \dfrac{1}{f'(x)} \Rightarrow E'(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{y}} = \dfrac{1}{\frac{1}{E(x)}} = E(x)$

Gráfica de $E(x)$



Teorema: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ se verifica $E(x+y) = E(x)E(y)$.

Dem: Sean $a = E(x)$, $b = E(y)$ y $c = E(x+y)$ es decir $\ln a = x$, $\ln b = y$ $\ln c = x+y$ por lo tanto $\ln(ab) \underset{\text{Prop 1}}{=} \ln a + \ln b = x + y = \ln c$ y como $\ln x$ es inyectiva, es $ab = c$ entonces $E(x)E(y) = E(x+y)$. □

Corolario: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ se verifica

1) $E(-y) = \dfrac{1}{E(y)}$
2) $E(x-y) = \dfrac{E(x)}{E(y)}$.

Dem: Ejercicio
Teorema: $\forall r \in \mathbb{Q}$ se verifica $E(r) = e^r$.

Dem: $\ln e^r = r \ln e = r{,}1 = r$ luego $e^r = E(r)$. □

Definición: Si $x \in \mathbb{R}$, deifnimos $e^x = E(x)$.

La exponencial y logaritmo en base a: $(a > 0,\ a \neq 1)$.

Definición: Si $a > 0$, $a \neq 1$ definimos la *función exponencial de base a*

$$a^x = e^{x \ln a} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Definición: Llamamos *función logaritmo de base a*, con $a > 0$, $a \neq 1$ a la función inversa de la función exponencial de base a. Es decir,

$$\begin{array}{rcl} \log_a & : & \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x & \to & \log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x \end{array}$$

Observación: También se puede definir

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

y a^x como inversa de esta función o de manera independiente una de la otra. También se pueden deducir

Propiedades:

1) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ $\qquad \log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

2) $a^{x+y} = a^x a^y$ $\qquad a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$

Técnicas de integración.

Técnicas de cálculo de integrales indefinidas.

Repaso: Llamamos *integral indefinida* de una función f al conjunto de todas las primitivas de f, notamos $\int f(x)dx$. Probamos que dos primitivas cualesquiera de f difieren en una constante, así si F es una primitiva de f

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

1) Tabla de integrales inmediatas.

$$\begin{array}{ll}
\int dx = x + c & \int \dfrac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + c \\
\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq 1 & \int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + c \\
\int e^x dx = e^x + c & \int \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arccos x + c \\
\int \sin x dx = -\cos x + c & \int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x| + c \\
\int \cos x dx = \sin x + c & \int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c \\
\int \dfrac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + c & \int \dfrac{1}{\sin^2 x}dx = \operatorname{cotan} x + c
\end{array}$$

2) Integración por descomposición.

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx$$

Ejemplos:

1) $\int \left(\dfrac{e^x}{2} + 3\sin x\right) dx = \frac{1}{2}e^x - 3\cos x + c$

2) $\int \dfrac{x^3+4x-2}{x^2}dx = \frac{1}{2}x^2 + 4\ln|x| + \frac{2}{x} + c$

3) $\int \dfrac{3+x^2}{1+x^2}dx = \int \dfrac{1+x^2+2}{1+x^2}dx = x + 2\arctan x + c$

4) $\int \tan^2 x dx = \int \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \tan x - x + c$

3) Integración por sustitución.

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))\, g'(x) \Longrightarrow \int f'(g(x))\, g'(x)\, dx = f(g(x)) + c$$

En general

Teorema (método de sustitución o cambio de variable): Sea f continua en I. Sea g una función derivable con derivada continua en I tal que $g(J) \subset I$. Entonces

$$\int f'(g(x))\, g'(x)\, dx \underset{t=g(x)}{=} \int f(t)\, dt$$

4) Integración por partes.

Teorema (integración por partes): Sean f y g derivables con derivada continua en I. Entonces

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)\, g(x) dx$$

5) Integración de funciones racionales propias.

Definición: Llamamos función racional propia al cociente $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ donde P y Q son polinomios y $\operatorname{gr} P < \operatorname{gr} Q$.

Si $\operatorname{gr} P \geq \operatorname{gr} Q$ sabemos que existen únicos polinomios C y R con $\operatorname{gr} R < \operatorname{gr} Q$ tales $P = CQ + R$ y luego $\dfrac{P}{Q} = C + \dfrac{R}{Q}$ donde será $\dfrac{R}{Q}$ propia.

Veremos distintos casos según sean las raíces del polinomio Q.

1º caso: Q tiene sólo raíces reales simples.

Entonces (podemos suponer que coeficiente principal de Q es 1)

$$Q(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

Será

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-\alpha_n}$$

con A_i a determinar.

Ejemplo: Calcular $\int \dfrac{dx}{x^2-2x-3}$.

Las raíces de Q son -1 y 3, será entonces $Q(x) = (x+1)(x-3)$ y

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{(x-1)(x-3)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-3} = \frac{A_1(x-3) + A_2(x+1)}{(x+1)(x-3)}$$

$$= \frac{(A_1+A_2)x + (-3A_1+A_2)}{(x+1)(x-3)}$$

$$\Longleftrightarrow (A_1+A_2)x + (-3A_1+A_2) = P(x) = 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ -3A_1 + A_2 = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \left\{A_2 = \tfrac{1}{4}, A_1 = -\tfrac{1}{4}\right\}$$

Por lo tanto

$$\int \frac{dx}{x^2-2x-3} = \int \frac{-1/4}{x+1}dx + \int \frac{1/4}{x-3}dx = -\frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln|x-3| + c$$

<u>2º caso</u>: Q tiene raíces reales múltiples.
Entonces (podemos suponer que coeficiente principal de Q es 1)

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{r_1}(x-\alpha_2)^{r_2}\cdots(x-\alpha_n)^{r_n}$$

Será

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} \;=\; & \frac{A_{11}}{x-\alpha_1} + \frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2} + \cdots + \frac{A_{2r_1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}} + \\
& + \frac{A_{21}}{x-\alpha_2} + \frac{A_{22}}{(x-\alpha_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2r_2}}{(x-\alpha_2)^{r_2}} + \\
& + \cdots\cdots + \\
& + \frac{A_{n1}}{x-\alpha_n} + \frac{A_{n2}}{(x-\alpha_n)^2} + \cdots + \frac{A_{nr_n}}{(x-\alpha_n)^{r_n}}
\end{aligned}$$

con A_{ij} a determinar.

Ejemplo: Calcular $\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$.

Las raíces de Q son 1 y -1, ambas dobles será entonces $Q(x) = (x-1)^2(x+1)^2$ y

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{1}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A_{11}}{x-1} + \frac{A_{12}}{(x-1)^2} + \frac{A_{21}}{x+1} + \frac{A_{22}}{(x+1)^2} = \\
&= \frac{A_{11}(x-1)(x+1)^2 + A_{12}(x+1)^2 + A_{21}(x+1)(x-1)^2 + A_{22}(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2} = \\
&= \frac{(A_{11}+A_{21})x^3 + (A_{11}+A_{12}-A_{21}+A_{22})x^2}{(x-1)^2(x+1)^2} + \\
&\quad + \frac{(-A_{11}+2A_{12}-A_{21}-2A_{22})x + (-A_{11}+A_{12}+A_{21}+A_{22})}{(x-1)^2(x+1)^2}
\end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow (A_{11}+A_{21})x^3 + (A_{11}+A_{12}-A_{21}+A_{22})x^2 + (-A_{11}+2A_{12}-A_{21}-2A_{22})x + (-A_{11} + A_{12}+A_{21}+A_{22}) = P(x) = 1$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A_{11}+A_{21} = 0 \\ A_{11}+A_{12}-A_{21}+A_{22} = 0 \\ -A_{11}+2A_{12}-A_{21}-2A_{22} = 0 \\ -A_{11}+A_{12}+A_{21}+A_{22} = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \{A_{11} = -\tfrac{1}{4},\ A_{12} = \tfrac{1}{4},\ A_{12} = \tfrac{1}{4},\ A_{22} = \tfrac{1}{4}\}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x^2-1)^2} &= \frac{1}{4}\left(-\int\frac{dx}{x-1} + \int\frac{dx}{(x-1)^2} + \int\frac{dx}{x+1} + \int\frac{dx}{(x+1)^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(-\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \ln|x+1| - \frac{1}{x+1}\right) + c \\
&= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right) + c
\end{aligned}$$

<u>3º caso</u>: Q tiene raíces complejas simples.

Si $\alpha + \beta i$ es raíz simple de Q, también lo es su conjugada $\alpha - \beta i$. Cada par de raíces conjugadas contribuye a la descomposición de $\frac{P}{Q}$ con una franción de la forma

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q} = \frac{Ax+B}{(x-(\alpha+\beta i))\,(x-(\alpha-\beta i))}$$

donde A y B deberán determinarse.

Ejemplos:

1) Calcular $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ con $b^2-4ac<0$.

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1}$$

$$= \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} \qquad \text{sustituyendo } \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)=t$$

$$= \tfrac{2}{3}\sqrt{3}\arctan(t)+c = \tfrac{2}{3}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)+c$$

2) Calcular $\int \frac{(Ax+B)dx}{ax^2+bx+c}$ con $b^2-4ac<0$.

$$\int \frac{3x+5}{x^2+x+1}dx = 3\int \frac{x+5/3}{x^2+x+1}dx \underset{(x^2+x+1)'=2x+1}{=} \frac{3}{2}\int \frac{2x+10/3}{x^2+x+1}dx$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+1-1+10/3}{x^2+x+1}dx$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + \frac{3}{2}\int \frac{7/3}{x^2+x+1}dx =$$

$$= \frac{3}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{7}{2}\tfrac{2}{3}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)+c$$

3) $\int \frac{xdx}{(x+1)\,(x^2+x+1)}$

$$\frac{x}{(x+1)\,(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1} \text{ determinar } A,B,C \text{ e integrar por descomposión}$$

4) $\int \frac{xdx}{x^4+1} = \int \frac{xdx}{(x^2)^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\arctan t + c = \frac{1}{2}\arctan x^2 + c$

5) $\int \frac{dx}{x^4+1}$

Las raíces de $x^4+1=0$, son $\begin{array}{l} \frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{2} \end{array}$ Luego la descomposición de x^4+1 es

$$\begin{aligned} x^4+1 &= \left(x-(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)\right)\left(x-(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i)\right)\left(x-(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i)\right)\left(x-(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)\right) \\ &= \left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right) \end{aligned}$$

Luego

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+b}{(x^2-\sqrt{2}x+1)}+\frac{Cx+D}{(x^2+\sqrt{2}x+1)}$$

4° caso: Q tiene raíces complejas múltiples.
Si $\alpha + \beta i$ es raíz de multiplicidad m de Q, también lo es su conjugada $\alpha - \beta i.de$ multiplicidad m.
Cada par de raíces conjugadas contribuye a la descomposición de $\frac{P}{Q}$ con una suma de franciones de la forma

$$\frac{A_1x + B_1}{x^2 + px + q} + \frac{A_2x + B_2}{(x^2 + px + q)^2} + \cdots + \frac{A_mx + B_m}{(x^2 + px + q)^m}$$

Ejemplo: Calcular $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}dx = \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2}dx - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$
$= \int \frac{1}{1+x^2}dx + \frac{1}{2}\int \underbrace{-2x\left(1+x^2\right)^{-2}}_{((1+x^2)^{-1})'} xdx$ seguir haciendo partes.
Veremos más técnicas de integración en la prática.

Cálculo de integrales definidas.

Vimos que (Barrow) si f es continua en $[a,b]$ y P es una primitiva de f entonces $\int_a^b f(x)dx = P(b) - P(a)$. Por lo tanto, el problema se centrará en hallar primitivas de f para aplicar Barrow.
Ejemplo: Calcular $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{2x^2+3}$, para ello buscamos primitivas de $\frac{1}{2x^2+3}$.
$\int \frac{dx}{2x^2+3} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\frac{2}{3}x^2+1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x\right)^2+1} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{t^2+1}$
$= \frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{2}\arctan t + c = \frac{\sqrt{6}}{6}\arctan\sqrt{\frac{2}{3}}x + c$, así una primitiva de $\frac{1}{2x^2+3}$ es $\frac{\sqrt{6}}{6}\arctan\sqrt{\frac{2}{3}}x$.
Luego aplicamos Barrow, entonces

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{2x^2+3} = \frac{\sqrt{6}}{6}\arctan\sqrt{\tfrac{2}{3}}x\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}\arctan\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\sqrt{6}}{6}\arctan 0 = \frac{\sqrt{6}}{6}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{36}\pi$$

Integración por sustitución y por partes en integrales definidas.

Combinando las fórmulas de integración por sustitución o por partes, con el 2° TFCI se puede probar que:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Ejemplos:
1) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$, haciendo la sustitución $\ln x = t$, es $\frac{1}{x}dx = dt$ y si $x = 1 \Rightarrow t = \ln 1 = 0$ y si $x = e \Rightarrow t = \ln e = 1$ luego

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \int_0^1 tdt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

2) $\int_0^1 xe^x dx$, por partes ponemos $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ y $g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x$ entonces

$$\int_0^1 xe^x dx = xe^x|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1e^1 - 0e^0 - e^x|_0^1 = e - \left(e^1 - e^0\right) = 1$$