O bien $z-z_0=-\frac{x_0}{z_0}(x-x_0)-\frac{y_0}{z_0}(y-y_0)$.
Para obtener la ecuación cartesiana de este plano hacemos $x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0)=0$, como $x_0^2+y_0^2+z_0^2=x_0^2+y_0^2+r^2-(x_0^2+y_0^2)=r^2$ se tiene $x_0x+y_0y+z_0z=r^2$.

Regla de la Cadena.

Definición: Llamamos *función vectorial* a una función $\bar{\alpha}: I=[a,b]\to\mathbb{R}^n$, para cada $t\in[a,b]$ será $\bar{\alpha}(t)=(\alpha_1(t),\ldots,\alpha_n(t))$. Si cada función α_k, que se llaman *funciones componentes* de $\bar{\alpha}$, son continuas, llamamos *curva* al conjunto $\Gamma=\{\bar{\alpha}(t):t\in[a,b]\}$, en este caso decimos que $\bar{\alpha}(t)$ es una parametrización continua de la curva Γ, y un punto $P\in\Gamma$ sii existe un $t_0\in I$ tal que $\bar{\alpha}(t_0)=P$. Si además α_k tienen derivadas continuas (o seccionalmente continuas) en I, la curva Γ se dice regular (o regular a trozos). Si $t_0\in\mathring{I}$ y $h\neq0$ es tal que $t_0+h\in I$, decimos que $\bar{\alpha}$ **es derivable en** t_0 si existe

$$\lim_{h\to0}\frac{\bar{\alpha}(t_0+h)-\alpha(t_0)}{h}$$

y notamos a este límite $\bar{\alpha}'(t_0)=\dfrac{d\bar{\alpha}}{dt}(t_0)$.

Teorema: $\bar{\alpha}$ derivable en I entonces $\bar{\alpha}$ es continua en I.
Teorema: Sea $\bar{\alpha}(t)=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i(t)e_i$, si $t_0\in\mathring{I}$ entonces $\bar{\alpha}$ es derivable en t_0 si y sólo si α_i es derivable en t_0 y $\bar{\alpha}'(t_0)=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i'(t_0)e_i=(\alpha_1'(t_0),\ldots,\alpha_n'(t_0))$ y se llama **vector tangente a la curva Γ en** t_0.
Dem: ejercicio.

Una composición muy particular.
Definicón: Sean $I\subseteq\mathbb{R}$, $\bar{\alpha}:I\to\mathbb{R}^n$ una función vectorial y $f:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ un campo escalar tal que $\operatorname{Im}(\bar{\alpha})\subset D$ entonces definimos la función compuesta $g:I\to\mathbb{R}$ por $g(t)=(f\circ\bar{\alpha})(t)=f(\bar{\alpha}(t))$.

Teorema: (Regla de la Cadena): Sea $t\in\mathring{I}\subset\mathbb{R}$ tal que $\bar{\alpha}(t)\in D\subset\mathbb{R}^n$ y existe $\bar{\alpha}'(t)$, sea $f:D\to\mathbb{R}$ un campo escalar diferenciable en $\bar{\alpha}(t)$ para cada $t\in\mathring{I}$, entonces $g=f\circ\bar{\alpha}$ es derivable en t y vale

$$g'(t)=(f\circ\bar{\alpha})'(t)=\nabla f(\bar{\alpha}(t))\cdot\bar{\alpha}'(t)$$

Dem: Veamos que existe $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g(t+h)-g(t)}{h}$. Sea $t\in\mathring{I}$ y $h\neq0$ tal que $t+h\in I$
Llamamos $a=\bar{\alpha}(t)$ y $v=\bar{\alpha}(t+h)-\bar{\alpha}(t)$ entonces $a+v=\bar{\alpha}(t+h)$.
Calculamos $g(t+h)-g(t)=f(a+v)-f(a)\underset{f\text{ dif}}{=}\nabla f(a)\cdot v+\|v\|E(a,v)$

donde $E(a,v)\underset{v\to0}{\longrightarrow}0$.
Observemos que $v\to0$ cuando $h\to0$ pues $\bar{\alpha}$ continua, luego $E(a,v)\underset{h\to0}{\longrightarrow}0$. Luego

$$\lim_{h\to0}\frac{g(t+h)-g(t)}{h}=\nabla f(a)\cdot\underbrace{\frac{\bar{\alpha}(t+h)-\bar{\alpha}(t)}{h}}_{\searrow\bar{\alpha}'(t)}+\underbrace{\left\|\frac{\bar{\alpha}(t+h)-\bar{\alpha}(t)}{h}\right\|}_{\text{acotado}}\underset{\searrow0}{E(a,v)}$$

$$g'(t)=\nabla f(\bar{\alpha}(t))\cdot\bar{\alpha}'(t)$$

□

Observación: Para $n=3$, si $\bar{\alpha}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ y $f(x,y,z)$ entonces $g(t)=f(\bar{\alpha}(t))=f(x(t),y(t),z(t))$. Entonces, la regla de cadena escrita en componentes será

$$\begin{aligned} g'(t) &= \nabla f(\bar{\alpha}(t))\cdot\bar{\alpha}'(t) \\ &= (f_x(\bar{\alpha}(t)),f_y(\bar{\alpha}(t)),f_z(\bar{\alpha}(t)))\cdot(x'(t),y'(t),z'(t)) \\ &= f_x x'+f_y y'+f_z z' \end{aligned}$$

Teorema (Interpretación geométrica): Sea $f:D\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ un campo escalar con derivadas parciales continuas y sea S una superficie de nivel de ecuación $f(x,y,z)=k$. Si $P(x_0,y_0,z_0)\in S$, entonces $\nabla f(P)$ es perpendicular a S, en el siguiente sentido: sea Γ una curva regular en S de parametrización $\bar{\alpha}(t)$ ($\bar{\alpha}:I\to\mathbb{R}^3$) tal que $\bar{\alpha}(t_0)=P$ para $t_0\in I$. Entonces

$$\nabla f(P)\cdot\bar{\alpha}'(t_0)=0$$

Demostración: Sea $g(t)=f(\bar{\alpha}(t))$, como $\bar{\alpha}(t)\in S$ para cada $t\in I$ será $g(t)=f(\bar{\alpha}(t))=k$ luego $g'(t)=0$ pero $g'(t)=\nabla f(\bar{\alpha}(t))\cdot\bar{\alpha}'(t)=0$ en particular para $t=t_0$. $\square$

Observación: Si $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ entonces $\nabla f(P)$ es perpendicular a Γ curva de nivel de f que contiene a P (análogo al teorema anterior para la curva de nivel $f(x,y)=k$), es decir

$$\nabla f(P)\perp \tan_\Gamma \text{ en } P.$$

Definición: (Plano tangente): Sea S superficie de nivel de ecuación $f(x,y,z)=k$, si f tiene derivadas parciales continuas y $P_0(x_0,y_0,z_0)\in S$, definimos el *plano tangente a S en P_0* como

$$\{P(x,y,z):\nabla f(P_0)\cdot(P-P_0)=0\}$$

La ecuación cartesiana de este plano es

$$f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0 \tag{7}$$

Comentario: Esta definición comprende a la primera. En efecto, si $z=f(x,y)$ es la ecuación de una superficie S definimos plano tangente por

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \tag{8}$$

Ahora a la superficie S de ecuación $z=f(x,y)$ la podemos considerar como la superficie de nivel cero de $\Phi(x,y,z)=z-f(x,y)=0$, será entonces $\nabla\Phi=(-f_x,-f_y,1)$. Luego el plano tangente en $P_0(x_0,y_0,z_0)=(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$, según (7), está dado por

$$\begin{aligned} \nabla\Phi(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0,y-y_0,z-z_0) &= 0 \\ -f_x(x_0,y_0)(x-x_0)-f_y(x_0,y_0)(y-y_0)+1\ (z-z_0) &= 0 \\ f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0) &= z-z_0 \end{aligned}$$

que es la ecuación dada en (6).

Ejemplo: Sea S una superficie de ecuación $x^2+y^2-z^2=0$, y $P_0(3,4,5)\in S$, la ecuación del plano tangente a S en P_0 es

$$\begin{aligned} 2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)-2z_0(z-z_0) &= 0 \\ 6(x-3)+8(y-4)-10(z-5) &= 0 \\ 3x+4y-5z &= 0 \end{aligned}$$

Definición: Sea f un campo escalar que admite derivadas parciales segundas, llamamos **Laplaciano de** f a $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$. Decimos que f es **armónica** si $\Delta f = 0$.

Ejemplo: Dada $f(x,y,z) = \dfrac{1}{r} = r^{-1}$ donde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ calcular ∇f y probar que f es armónica fuera del origen.

Observemos que $r_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r} = xr^{-1}$, análogamente se obtienen $r_y = yr^{-1}$ y $r_z = zr^{-1}$.

$$\begin{array}{ll}
f_x = -r^{-2}r_x = -r^{-2}xr^{-1} = -r^{-3}x & f_{xx} = 3r^{-4}r_x x - r^{-3} = r^{-3}\left(3x^2r^{-2}-1\right) \\
f_y = -r^{-2}r_y = -r^{-3}y & f_{yy} = 3r^{-4}r_y y - r^{-3} = r^{-3}\left(3y^2r^{-2}-1\right) \quad \text{sumando} \\
f_z = -r^{-2}r_z = -r^{-3}z & f_{zz} = 3r^{-4}r_z z - r^{-3} = r^{-3}\left(3z^2r^{-2}-1\right) \\
\nabla f = \left(\dfrac{-x}{r^3}, \dfrac{-y}{r^3}, \dfrac{-z}{r^3}\right) & \overline{\Delta f = r^{-3}\left(3r^{-2}\left(x^2+y^2+z^2\right)-3\right) = 0}
\end{array}$$

Extremos de campos escalares.

Definición: (**Máximo y mínimo de** f) : Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo escalar.
Si existe $a \in A$ tal que $f(x) \le f(a)$ $\forall x \in A$ decimos que $f(a)$ es un **máximo absoluto de** f **en** A. Si existe $a \in A$ tal que $f(x) \le f(a)$ $\forall x \in \mathcal{N}(a) \cap A$ decimos que $f(a)$ es un **máximo local o relativo de** f.
Si existe $a \in A$ tal que $f(x) \ge f(a)$ $\forall x \in A$ decimos que $f(a)$ es un **mínimo absoluto de** f **en** A. Si existe $a \in A$ tal que $f(x) \ge f(a)$ $\forall x \in \mathcal{N}(a) \cap A$ decimos que $f(a)$ es un **mínimo local o relativo de** f.
Definición: (**Extremos de** f) : Llamamos **extremos de** f a los máximos y mínimos de f.
Notaciones: Decimos $f(a)$ es un *extremo absoluto de* f si $f(a)$ es un mínimo o un máximo absoluto de f en A y notamos

$$f(a) = \min_{x\in A} f(x) = m = m_a \qquad\qquad f(a) = \max_{x\in A} f(x) = M = M_a$$

Decimos $f(a)$ es un *extremo local de* f si $f(a)$ es un mínimo local o un máximo local de f en A y notamos

$$f(a) = \min_{x\in\mathcal{N}(a)\cap A} f(x) = m_L \qquad\qquad f(a) = \max_{x\in\mathcal{N}(a)\cap A} f(x) = M_L$$

En cualquiera de estos casos decimos que $f(a)$ es un extremo de f o que f alcanza un extremo en a.

Ejemplos: 1) $f(x,y) = 6$ tiene máximo y mínimo en todos los puntos y vale 6.
2) $g(x,y) = y^2 \ge 0$ $\forall (x,y)$ luego f alcanza su mínimo en todos los puntos de la forma $(x,0)$ siendo $\min f = f(x,0) = 0$ y no tiene máximo.
3) $h(x,y) = 4 - x^2 - y^2 \le 4$ $\forall (x,y)$ entonces el máximo de h es 4 y lo alcanza en $(0,0)$, es decir $\max h = h(0,0) = 4$ y no tiene mínimo.

Observación: Observemos que f puede alcanzar su máximo o su mínimo en varios puntos de su dominio (ejemplo 1) y que no siempre tiene máximo y mínimo (ejemplo 2 y 3). Es decir, puede no existir máximo o mínimo de f y de existir pueden alcanzarse en más de un punto.
Definición: Un conjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$ es llamado **compacto**.
Teorema (**Weierstrass**)**:** Si f es continua en A compacto entonces f tiene máximo y mínimo en A, es decir existen $a, b \in A$ tales que

$$\max_A f = f(a) \qquad \text{y} \qquad \min_A f = f(b)$$

Teorema (Condición necesaria de extremos): Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Si f tiene un extremo local en $a \in \mathring{A}$ y f es diferenciable en $\mathring{A}$ entonces $\nabla f(a) = \bar{0}$, esto es

$$\begin{aligned} D_1 f(a) &= 0 \\ D_2 f(a) &= 0 \\ &\vdots \\ D_n f(a) &= 0 \end{aligned}$$

Demostración: Como $a \in \mathring{A}$ existe $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subset A$. Luego si $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$ es tal que $\|h\| < \delta$ el segmento $\overrightarrow{a - h, a + h}$ está en $B(a, \delta) \subset A$. Definimos $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ por

$$g(t) = f(a + th)$$

Así, $g(0) = f(a)$. Como f es diferenciable y tiene una extremo local en a resulta g derivable en 0 y tiene un extremo local en 0. Luego será $g'(0) = \nabla f(a) \cdot h = 0$ $\forall h$ tal que $\|h\| < \delta$. Por lo tanto $\nabla f(a) = \bar{0}$. $\square$

Observación: Sean $a \in \mathring{A}$, f diferenciable en A. Si $f(a)$ es un extremo local $\Rightarrow \nabla f(a) = \bar{0}$. Sin embargo, en los puntos de A donde se anula el gradiente de f no necesariamente hay un extremo como puede verse en el siguiente ejemplo:

Ejemplo Sea $f(x, y) = xy$, $f(0, 0) = 0$, $\nabla f(x, y) = (y, x)$, $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$, sin embargo f no tiene extremo local en $(0, 0)$, pues f toma valores positivos en 1° y 3° cuadrante y negativos en 2° y 4°. Más aún, como la gráfica de f cerca del $(0, 0)$ se asemeja a una montura, el punto $\left(\bar{0}, 0\right) = \left(\bar{0}, f(\bar{0})\right)$ es llamado punto de ensilladura.

Definición (Puntos estacionarios y puntos de ensilladura): Los puntos a tales que $\nabla f(a) = \bar{0}$ son llamados **puntos estacionarios o críticos**. Puede ocurrir que en un punto estacionario a:

- f tenga un extremo (máximo o mínimo)
- o no sabemos qué pasa con f.

Si $\nabla f(a) = \bar{0}$ y f no tiene un extremo en a, entonces $(a, f(a))$ es llamado **punto silla** o **punto de ensilladura**.

Observación: Si f es diferenciable en todo su dominio A abierto de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\{a \in A : f \text{ tiene un extremo local en } a\} \underset{\not\supseteq}{\subseteq} \{a \in A : a \text{ es estacionario}\}$$

Trataremos de establecer condiciones suficientes para determinar cuándo un punto estacionario es un extremo.

Definición: (Matriz Hessiana): Si $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es un campo escalar $C^2(A)$ y $a \in \overset{\circ}{A}$, llamamos **matriz Hessiana de f en** a, a la matriz dada por las derivadas parciales segundas de f en a

$$H_f(a) = H(a) = \begin{pmatrix} D_{11} f(a) & D_{12} f(a) & \cdots & D_{1n} f(a) \\ D_{21} f(a) & \cdots & \cdots & D_{2n} f(a) \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1} f(a) & \cdots & \cdots & D_{nn} f(a) \end{pmatrix}$$

Llamamos *Hessiano* al det $H(A)$.

Criterio del Hessiano para la determinación de extremos para $n = 2$.

Para un campo escalar $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la **matriz Hessiana de** f **en** $a \in \overset{\circ}{A}$ está dada por

$$H(a) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a) & f_{xy}(a) \\ f_{xy}(a) & f_{yy}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

y su Hessiano es $\det(H(a)) = f_{xx}(a) f_{yy}(a) - f_{xy}^2(a) = ac - b^2$.
Luego si a es un punto estacionario de f (esto es, $\nabla f(a) = \bar{0}$), y supongamos que las derivadas parciales segundas de f son continuas en $B(a, r)$ entonces si

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{(I)}\ \det H(a) > 0 \text{ y } \begin{cases} f_{xx}(a) > 0 \\ f_{xx}(a) < 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(a) = \min_L f \\ f(a) = \max_L f \end{cases} \\ \text{(II)}\ \det H(a) < 0 \Longrightarrow (a, f(a)) \text{ es punto de ensilladura} \\ \text{(III)}\ \det H(a) = 0 \quad \text{el criterio no decide} \end{array}}$$

Ejemplos:

1. Sea $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$, buscamos los puntos estacionarios haciendo $\nabla f(x, y) = (3x^2 - 3, 3y^2 - 3) = (0, 0)$, obtenemos estos 4 puntos estacionarios $(\pm 1, \pm 1)$. Calculamos la matriz Hessiana $H(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$ y el $\det(H(x, y)) = 36xy$ entonces en los puntos estacionarios es:

   $\diamond$ $\det(H(1, 1)) = 36 > 0$ y $f_{xx}(1, 1) = 6 > 0 \Rightarrow Q$ definida positiva $\Rightarrow f(1, 1)$ es mínimo.

   $\diamond$ $\det(H(-1, -1)) = 36 > 0$ y $f_{xx}(-1, -1) = -6 < 0 \Rightarrow Q$ definida negativa $\Rightarrow f(-1, -1)$ es máximo.

   $\diamond$ $\det(H(-1, 1)) = \det(H(1, -1)) = -36 < 0 \Rightarrow Q$ indefinida, no hay extremos en $(-1, 1)$ ni en $(1, -1)$, luego $((-1, 1), f(-1, 1))$ y $((1, -1), f(1, -1))$ son puntos de ensilladura.

2. Sea $f(x, y) = \underbrace{(x^2 + y^2)}_{M} \underbrace{e^{x^2 - y^2}}_{E}$, buscamos los puntos estacionarios haciendo

   $\nabla f(x, y) = (2xE + ME2x, 2yE - ME2y) = E(2x(1 + M), 2y(1 - M)) = (0, 0) \iff$

   $$\begin{cases} 2x\underbrace{(1 + M)}_{\neq 0} = 0 \\ 2y(1 - M) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \text{ o } M = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0,\ y = 1,\ y = -1 \end{cases}$$

   Obtenemos 3 puntos estacionarios $(0, 0)$ y $(0, \pm 1)$, calculamos la matriz Hessiana

   $$H(x, y) = E \begin{pmatrix} 2 + 8x^2 + 2M + 4Mx^2 & -4Myx \\ -4Myx & 2 - 8y^2 - 2M + 4My^2 \end{pmatrix}$$

   En los puntos estacionarios es

   $\diamond$ $H(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\det(H(0, 0)) = 4 > 0$ y $f_{xx}(0, 0) = 2 > 0 \Rightarrow Q$ definida positiva $\Rightarrow$ $f(0, 0)$ es mínimo.

   $\diamond$ $H(0, \pm 1) = \begin{pmatrix} 4e^{-1} & 0 \\ 0 & -4e^{-1} \end{pmatrix}$, $\det(H(0, \pm 1)) < 0 \Rightarrow Q$ indefinida, no hay extremos $\Rightarrow$ $((0, 1), f(0, 1))$ y $((0, -1), f(0, -1))$ son puntos de ensilladura.

3. Si Q es semidefinida, ejemplos a,b, o idénticamente nula, ejemplos c,d (caso $D_{ij}f(a) = 0$), nada se puede concluir a priori, habrá que analizar cada caso en especial, como puede verse en los siguientes ejemplos:

   a) Sea $f(x,y) = (y-x)^2 + y^3$, $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-2y \\ -2x+2y+3y^2 \end{pmatrix} = \bar{0}$, tenemos único punto estacionario el $(0,0)$; la matriz Hessiana es $H(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y+2 \end{pmatrix}$ y $\det H(0,0) = 0 \Rightarrow Q$ es semidefinida. En este caso, $f(x,x) = x^3$, $f(0,0) = 0$ y positiva en el 1° cuadrante y negativa en el 3°, luego $((0,0), f(0,0))$ es punto de ensilladura.

   b) Sea $f(x,y) = (y-x)^2 + y^4$, $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-2y \\ -2x+2y+4y^3 \end{pmatrix} = \bar{0}$, tenemos único punto estacionario el $(0,0)$; la matriz Hessiana es $H(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 12y+2 \end{pmatrix}$ y $\det H(0,0) = 0 \Rightarrow Q$ es semidefinida, pero $f(0,0) = 0$ y $f \geq 0$, luego $f(0,0)$ es mínimo.

   c) Sea $f(x,y) = x^3 + y^3$, $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 3y^2 \end{pmatrix} = \bar{0}$, tenemos único punto estacionario el $(0,0)$; la matriz Hessiana $H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$ y $\det H(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow Q = 0$, pero $f > 0$ en el 1° cuadrante y $f < 0$ en el 3 ° entonces $((0,0), f(0,0))$ es punto de ensilladura.

   d) Sea $f(x,y) = x^4 + y^4$, $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 \\ 4y^3 \end{pmatrix} = \bar{0}$, único punto estacionario el $(0,0)$; la matriz Hessiana $H(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$ y $\det H(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow Q = 0$, pero $f \geq 0$ y $f(0,0) = 0$, entonces $f(0,0)$ es mínimo.

Extremos de funciones continuas en conjuntos compactos.

Se plantea el problema de optimizar un campo escalar f, por ejemplo $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sobre una región D cerrada y acotada de $\mathbb{R}^2$ (un compacto). Si f es continua en D, el teorema de Weierstrass garantiza la existencia de máximo y mínimo de f en D. Hay que estudiar los extremos libres de f en el interior de D y los extremos de f en la frontera de D.

Ejemplo: Sea $f(x,y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ en $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\} = \mathring{D} \cup \partial D$.
En el interior de D, como f es diferenciable buscamos los extremos de f entre sus puntos estacionarios, para ello planteamos $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y - y^3 - 3x^2y \\ x - x^3 - 3xy^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, obtenemos 8 puntos estacionarios, que son: $(0,0), (\pm 1, 0), (0, \pm 1), (\pm\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
$\diamond$ $(0,0), (0,1), (1,0)$ descartados por ahora porque no están en el interior.
$\diamond$ $(-1,0), (0,-1), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ descartados por estar fuera de D.
$\diamond$ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in \mathring{D}$, es el único punto estacionario en el interior de D. La matriz Hessiana de f es $H(x,y) = \begin{pmatrix} -6xy & 1 - 3y^2 - 3x^2 \\ 1 - 3x^2 - 3y^2 & -6xy \end{pmatrix}$, evaluada en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ es $H(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Su determinante es $\det H(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 2 > 0$ y $f_{xx}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = -\frac{3}{2} < 0$ luego Q es definida negativa, entonces $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \max_{\mathring{D}} {}_L f = \frac{1}{8}$.
En la frontera de D, ponemos $\partial D = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ siendo $A_1 = \{0\} \times [0,1]$, $A_2 = [0,1] \times \{0\}$, $A_3 = \{1\} \times [0,1]$ y $A_4 = [0,1] \times \{1\}$.
– $f(A_1) = f(0,y) = 0\ \forall y \in [0,1]$, luego $\min_{A_1} {}_L f = \max_{A_1} {}_L f = 0$.

– $f(A_2) = f(x,0) = 0 \ \forall x \in [0,1]$, luego $\min\limits_{A_2} {}_L f = \max\limits_{A_2} {}_L f = 0$.
– $f(A_3) = f(1,y) = -y^3 \ \forall y \in [0,1]$, luego $\min\limits_{A_3} {}_L f = f(1,1) = -1$ y $\max\limits_{A_3} {}_L f = f(1,0) = 0$.
– $f(A_4) = f(x,1) = -x^3 \ \forall x \in [0,1]$, luego $\min\limits_{A_4} {}_L f = f(1,1) = -1$ y $\max\limits_{A_4} {}_L f = f(0,1) = 0$.
Observemos que cuando evaluamos f en la frontera de D eventualmente podemos tener una función que sólo depende de una sola variable, en esos casos puede ser necesario y conveniente hacer un estudio apropiado para buscar los extremos.
Comparamos ahora los extremos (locales) de f obtenidos en estos subconjuntos y concluimos que el máximo de f está en el interior en el único punto estacionario o sea $\boxed{\max\limits_{D} f = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}}$ y el mínimo de f está en la frontera y es $\boxed{\min\limits_{D} f = f\,(1,1) = -1}$

Extremos condicionados. Multiplicadores de Lagrange. Problemas de aplicación.

Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g_i : B_i \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (con $i = 1, \ldots, k$) campos escalares, se plantea el problema de optimizar f con $k < n$ condiciones $g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n) = 0$, para $(x_1, \ldots, x_n) \in A \cap (\bigcap\limits_{i=1}^{k} B_i)$, es decir

$$\begin{cases} \text{optimizar} \quad f(x_1, \ldots, x_n) \\ \text{s/a} \quad g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad g_k(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \qquad (x_1, \ldots, x_n) \in A \cap (\bigcap\limits_{i=1}^{k} B_i) \end{cases}$$

Ejemplos introductorios.
Sean $f(x,y) = x + y$ y $g_1(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ queda planteado el siguiente problema

$$\begin{cases} \text{optimizar} \quad x + y \\ \text{s/a} \quad x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

De la ecuación $g_1(x,y) = 0$ despejo $y = y(x) = \pm\sqrt{1-x^2}$, con $|x| \le 1$.
1°) defino $g\,(x) = f(x, y(x)) = f(x, \sqrt{1-x^2}) = x + \sqrt{1-x^2}$, busco los extremos de g, haciendo $g'\,(x) = \frac{\sqrt{(1-x^2)}-x}{\sqrt{(1-x^2)}} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{(1-x^2)} > 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Como $g''(x) = \frac{-1}{(1-x^2)^{3/2}}$, luego $g''(\frac{\sqrt{2}}{2}) = -2\sqrt{2} < 0$, entonces $g(\frac{\sqrt{2}}{2}) = f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2} = M$ es el máximo.
2°) defino $h\,(x) = f(x, y(x)) = f(x, -\sqrt{1-x^2}) = x - \sqrt{1-x^2}$, busco los extremos de h, haciendo $h'\,(x) = \frac{\sqrt{(1-x^2)}+x}{\sqrt{(1-x^2)}} = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{(1-x^2)} < 0 \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Como $h''(x) = \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$, luego $h''(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2\sqrt{2} > 0$, entonces $h(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2} = m$ es el mínimo.

b) Mismo ejemplo a) con el método de Lagrange.
Sean $f\,(x,y) = x + y$, $g_1\,(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, las curvas de nivel de f son rectas $x + y = k$. Sólo hay intersección entre las curvas de nivel de f y la curva de ecuación $g_1 = 0$ para valores de $k \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Los óptimos estarán en los extremos de variación de k, luego en puntos como P no puede haber extremos. Los candidatos a obtener los extremos de f son los puntos Q y R. En ellos los

gradientes de g_1 y f son paralelos o proporcionales: es decir $\nabla f(Q) = \lambda \nabla g_1(Q)$, siendo $Q = (x, y)$ un punto del 1º cuadrante, tenemos

$$\begin{cases} \nabla f(Q) = (1,1) \\ \nabla g_1(Q) = (2x, 2y) \\ Q(x,y) \in 1 \text{ cuadrante} \end{cases}$$

Entonces $(1,1) = \lambda(2x, 2y) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \end{cases} \Leftrightarrow x = y$, además deben verificar

$$Q(x, y = x) \in 1 \text{ cuadrante} \quad \text{y} \quad g_1(x,x) = 0 \Rightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Análogamente, para el punto R en el 3º cuadrante con $\nabla f(R) = \lambda \nabla g_1(R)$, se obtiene $x = y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Y nuevamente $f(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = \sqrt{2} = M$ es el máximo y $f(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) = -\sqrt{2} = m$ es el mínimo.

Método de Lagrange. Multiplicadores de Lagrange.

Para optimizar un campo escalar diferenciable $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con la condición $g = 0$ (siendo $g : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo escalar diferenciable) los extremos ocurren en los puntos $P = (x_1, \ldots, x_n) \in A \cap B$ que junto a λ son solución del sistema $(n+1) \times (n+1)$ dado por

$$\begin{cases} \nabla f(P) = \lambda \nabla g(P) \\ \\ g(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Así, resulta que si f tiene un extremo en $P \in A \cap B$ entonces existe $\lambda \neq 0$ tal que $\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$ y $g(P) = 0$. El escalar λ se llama **multiplicador de Lagrange**.

Ejemplo: Optimizar la distancia del origen a la elipse de ecuación $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$.
Planteamos el problema

$$\begin{cases} \text{optimizar } f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \text{s/a } \; g(x,y) = 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0 \\ \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Como $f \geq 0$ y $\sqrt{\cdot}$ es creciente, f es máxima (o mínima) cuando f^2 es máxima (o mínima), consideramos el problema equivalente

$$\begin{cases} \text{optimizar } x^2 + y^2 \\ \text{s/a } \; g(x,y) = 0 \\ \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Planteamos las ecuaciones, para $P(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda \neq 0$

$$\begin{cases} \nabla f(P) = \lambda \nabla g(P) \\ g(P) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \lambda(10x + 6y) \\ 2y = \lambda(6x + 10y) \\ 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0 \end{cases}$$

si despejamos λ, tenemos $\dfrac{5x + 3y}{x} = \dfrac{3x + 5y}{y} \Rightarrow y = \pm x$, reemplazando en la condición $g(x, \pm x) = 0$, tenemos

$$\begin{cases} g(x,x) = 0 \Leftrightarrow \quad 16x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} & \to Q = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ & \searrow Q' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ g(x,-x) = 0 \Leftrightarrow \quad 4x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2} & \to P = \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) \\ & \searrow P' = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \end{cases}$$

Siendo el máximo $f(P) = f(P') = 2$ y el mínimo $f(Q) = f(Q') = 1$.

MÉTODO DE LAGRANGE CON MÁS CONDICIONES.
Consideramos el problema de optimizar $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sujeto a dos condiciones:

$$\begin{cases} \text{optimizar } f(x,y,z) \\ \text{s/a} \;\; G_1(x,y,z) = 0 \\ \qquad\;\; G_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Sean f un campo escalar diferenciable en A y G_1, G_2 campos escalares diferenciables en $B_1 \cap B_2 \subseteq \mathbb{R}^3$. La intersección de las superficies de ecuaciones $G_1(x,y,z) = 0$ y $G_2(x,y,z) = 0$ es una curva Γ de parametrización $\alpha(t)$. Sea P un punto en esa curva y supongamos $\Gamma \subset A$, es decir, $P = \alpha(t_0)$ para algún t_0. Defino $\omega = f \circ \alpha$. Si f tiene un extremo en P sujeto a las condiciones $G_1(x,y,z) = 0$ y $G_2(x,y,z) = 0$ (o sea $P \in \Gamma$) entonces ω tiene un extremo del mismo tipo en t_0. Luego $\omega'(t_0) = 0$ o sea $\nabla f(\alpha(t_0)) \times \alpha'(t_0) = 0$, es decir $\nabla f(P) \perp \alpha'(t_0)$.
El vector $\alpha'(t_0)$ es tangente a Γ y está determinado por la intersección de los planos tangentes a las superficies dadas por $G_1(x,y,z) = 0$ y $G_2(x,y,z) = 0$ en P. Luego $\alpha'(t_0) \perp \nabla G_1(P)$ y $\alpha'(t_0) \perp \nabla G_2(P)$. Por lo tanto los vectores $\nabla f(P)$, $\nabla G_1(P)$ y $\nabla G_2(P)$ son coplanares. Si $\nabla G_1(P)$ y $\nabla G_2(P)$ son linealmente independientes entonces existen λ_1, λ_2 tales $\nabla f(P) = \lambda_1 \nabla G_1(P) + \lambda_2 \nabla G_2(P)$, donde λ_1, λ_2 son los **multiplicadores de Lagrange**.

El óptimo ocurre en los puntos $P = (x,y,z) \in \Gamma \subset A \cap (B_1 \cap B_2)$, que junto con λ_1, λ_2 son solución del sistema 5×5

$$\begin{cases} \nabla f(P) = \lambda_1 \nabla G_1(P) + \lambda_2 \nabla G_2(P) \\ G_1(P) = 0 \\ G_2(P) = 0 \end{cases}$$

En general, si $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g_i : B_i \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ para $i = 1, \ldots, k$ con $k < n$ son campos escalares diferenciables, se plantea el problema de optimizar $f(x_1, \ldots, x_n)$ con $k < n$ condiciones $g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n) = 0$, para $P(x_1, \ldots, x_n) \in A \cap (\bigcap_{i=1}^{k} B_i)$, o sea

$$\begin{cases} \text{optimizar } \; f(x_1, \ldots, x_n) \\ \text{s/a} \quad g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\quad\; g_k(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

El óptimo ocurre en los puntos $PP(x_1, \ldots, x_n) \in A \cap (\bigcap_{i=1}^{k} B_i)$ que con λ_i para $i = 1, \ldots, k$ son solución del sistema $(n+k) \times (n+k)$

$$\begin{cases} \nabla f(P) = \lambda_1 \nabla g_1(P) + \ldots + \lambda_k \nabla g_k(P) \\ g_1(P) = 0 \\ \quad \vdots \\ g_k(P) = 0 \end{cases}$$

Ejemplo: Armar la mayor caja sin tapa (max volumen) con $12m^2$ de material. Planteamos el problema

$$\begin{cases} \text{máx } V(x,y,z) = xyz \\ \text{s/a} \;\; g(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz - 12 = 0 \\ \qquad\;\; (x,y,z) \in \left(\mathbb{R}_0^+\right)^3 \end{cases}$$

Con método de multiplicaremos debemos resolver

$$\left\{\begin{array}{l}\nabla V\left(P\right)=\lambda\nabla g\left(P\right)\\ g(P)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}V_x=\lambda g_x\\ V_y=\lambda g_y\\ V_z=\lambda g_z\\ g(P)=0\end{array}\right.$$

es decir

$$\left\{\begin{array}{l}yz=\lambda(y+2z)\\ xz=\lambda(x+2z)\\ xy=\lambda(2x+2y)\\ xy+2xz+2yz-12=0\end{array}\right.$$

cuya solución es $\left\{x=2,y=2,z=1,\lambda=\frac{1}{2}\right\}$ o $\left\{x=-2,y=-2,z=-1,\lambda=-\frac{1}{2}\right\}$ pero descartamos ésta última pues no pertenece al dominio consideramos (x,y,z deben representar dimensiones de una caja), luego el máximo es $V(2{,}2{,}1)=4$ y se alcanza en $(2,2,1)$. Es decir, la mayor caja es la de 2m de ancho por 2m de largo por 1m de alto.